Engineering
Library
TK
6540
.A62

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

TOME II. OCTOBRE 1947. N° 10.

Tome II — Octobre 1947 — N° 10

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T. S. F.

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIO-ÉLECTRIQUE
LA RADIOTECHNIQUE
SOCIÉTÉ INDÉPENDANTE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL
COMPAGNIE RADIO FRANCE
COMPAGNIE RADIO MARITIME
RADIO-ORIENT
COMPAGNIE RADIO CINÉMA
ÉTABLISSEMENTS E. ROBERT ET Cie (LA STÉATITE INDUSTRIELLE)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

L. Bouthillon. — Oscillations et phénomènes transitoires. Leur étude par les transformations de Laplace et de Cauchy 287

J. Riethmüller. — Méthodes et appareillage de mesure de l'émission des cathodes à oxydes . 329

E. Regenstreif. — Sur la détermination des éléments cardinaux des miroirs électroniques . 348

J. Ortusi. — Les cellules photoélectriques à couche d'arrêt 359

F. Bertein. — Relation entre les défauts de réalisation des lentilles et la netteté des images . 379

M. Denis et R. Liot. — Contribution à l'étude des procédés et appareils de mesure dans le domaine des ondes centimétriques 409

Table des matières du tome II 439

La reproduction des Mémoires et figures publiés dans les *Annales* est autorisée moyennant l'indication complète d'origine.

L'envoi des *Annales* est fait contre versement de la somme de 250 francs par fascicule, ou 800 francs pour une souscription à 4 fascicules à paraître dans l'année, à titre de participation aux frais.

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, 98 bis, boulevard Haussmann, Paris (8e).

Règlement par chèque à l'ordre de la Compagnie Générale de T.S.F. ou versement à son compte C. P. Paris 1068-98.

OSCILLATIONS ET PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES. LEUR ÉTUDE PAR LES TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET DE CAUCHY [1]

PAR L. BOUTHILLON,

Directeur à la Compagnie générale de Télégraphie sans fil,
Maître de Conférences à l'École Polytechnique.

SOMMAIRE. — *La première partie est consacrée à une étude d'ensemble des oscillations et des phénomènes transitoires dans les systèmes mécaniques ou électriques linéaires.*

Considérant d'abord les ensembles à caractéristiques localisées, l'auteur étudie les systèmes mécaniques voisins de l'état d'équilibre et les réseaux électriques; il rapproche ensuite les systèmes gyroscopiques des systèmes électromécaniques à liaison par champ magnétique. Tous ces systèmes sont représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La forme classique de la solution, avec ses termes de régime et transitoire, est rappelée; l'importance et la diversité des applications sont mises en évidence sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre.

Les milieux continus sont ensuite étudiés. De vastes domaines de la physique sont régis par une équation aux dérivées partielles du second ordre qui a comme cas particuliers l'équation des télégraphistes, l'équation de la diffusion et l'équation des ondes.

La seconde partie expose l'application des transformations de Laplace et de Cauchy à l'étude des oscillations et des phénomènes transitoires.

Après un rappel de quelques définitions et résultats de la théorie des fonctions de variables complexes, l'auteur définit les transformations de Laplace et de Cauchy et énumère les conditions de l'inversion de Laplace-Cauchy. Il indique les principales règles du calcul des transformations.

L'application aux équations différentielles linéaires à coefficients constants est ensuite abordée. La méthode d'intégration est exposée; l'étude des solutions fait ressortir ses caractéristiques; les cas importants où le second membre est la fonction unité ou la fonction impulsive sont envisagés; les cas pratiques ressortissant à l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants sont traités à titre d'exemple.

Enfin sont indiquées les règles d'application de la méthode à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Deux exemples importants sont donnés ressortissant à l'équation de la diffusion et à l'équation des ondes.

Le mémoire se termine par des tableaux réunissant les principales règles de calcul et un certain nombre de couples de fonctions associées.

0. INTRODUCTION.

Si, me conformant à l'antique usage, je commençais ces conférences en invoquant la protection des dieux, c'est le panthéon polytechnicien qui fournirait mes inspirateurs. Des noms prestigieux s'imposeraient : ceux de Laplace, premier examinateur des élèves, de Lagrange, premier professeur d'Analyse et de Mécanique, de Cauchy et de Poincaré, tous deux élèves puis professeurs à l'École polytechnique : Et c'est bien d'autres qu'il faudrait ajouter pour jalonner le chemin qui, avant et après Heaviside, pionnier des nouvelles méthodes, aboutit à la consti-

[1] Conférences faites à l'École Polytechnique les 18 et 25 avril 1944.

tution, en corps de théorie cohérent et sûr, de l'étude des oscillations et des phénomènes transitoires, par les transformations de Laplace et de Cauchy. Il faudrait citer Liouville, Vaschy, J.-B. Pomey, Paul Lévy, P. Humbert, Gaston et Roger Julia, André Blondel, Bayard, tous polytechniciens d'origine ou d'adoption, tous anciens élèves, répétiteurs, professeurs de l'École polytechnique. La brièveté de cet exposé qui ne peut être qu'une incursion rapide dans un vaste domaine, ne me permettra pas de marquer au passage la pierre que chacun d'eux a fournie à l'édifice. J'ai voulu du moins que cet hommage leur fut rendu.

Pour définir les problèmes dont nous aurons ensuite à chercher la solution, en marquer la nature et l'importance, je voudrais d'abord vous convier à l'exploration d'un chapitre de la Physique générale.

La science physique, y compris la mécanique, est ordinairement, dans l'enseignement et la recherche répartie en compartiments séparés : mécanique, astronomie, chaleur, optique, électricité, acoustique, énergétique. Il n'y a guère en France de ces synthèses dont Thomson et Tait ont au siècle dernier, en Angleterre, dans leur « Philosophie naturelle », donné un magnifique exemple. Il n'y a guère de laboratoire établi sur une idée générale, par exemple qui, consacré à l'étude du rayonnement, aborde celui-ci sous tous ses aspects : mécanique, acoustique, optique, électromagnétique.

Cette division du travail est en un sens la plus naturelle. Elle ramène tout à l'homme et correspond à la diversité de ses organes de perception et d'action. L'homme de Néanderthal savait déjà qu'il avait des yeux pour voir, des oreilles pour entendre, un toucher pour se brûler, que lui-même et les choses extérieures étaient capables de mouvement. Quand, pressé par la nécessité d'échapper aux bêtes féroces, il tendait ses efforts à mieux percevoir les bruits de la forêt, à distinguer des détails plus fins, à courir plus vite ou à sauter plus haut, quand il construisait des outils rudimentaires pour augmenter la précision ou l'acuité de ses sens, il faisait déjà de la physique suivant la conception qui est encore le plus souvent celle de l'enseignement, il était tour à tour mécanicien, opticien, acousticien.

Cependant, est-il certain que cette répartition soit la plus rationnelle ? De ce qu'un phénomène est perçu par les yeux et un autre par les oreilles ou même, tel un courant électrique, n'excite aucun de nos organes, il serait erroné de conclure qu'il s'agit de choses entièrement différentes. Il arrive que nos sens établissent des distinctions artificielles et s'il en est ainsi, si la même réalité se trouve masquée par des apparences diverses, il est assurément intéressant et important de rationaliser l'enseignement et la recherche en substituant aux principes traditionnels une base plus solide, établie sur les rapports que le progrès des connaissances a découverts entre choses distinctes suivant l'expérience commune, mais cependant unes dans leur essence.

L'avantage d'une telle coordination est évident. Considérons deux oscillations de même période à angle droit, représentées par deux vecteurs OA et OB, dont les grandeurs varient sinusoïdalement avec le temps. Elles se composent en un vecteur OC dont l'extrémité décrit une ellipse (ou une circonférence si les oscillations sont de même amplitude et déphasées de 90°). Et inversement un vecteur tournant est décomposable en deux vecteurs sinusoïdaux OA et OB à angle droit. Cette proposition

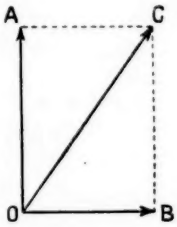


Fig. 1.

purement cinématique trouve immédiatement son application dans tous les domaines de la physique; en mécanique c'est le mouvement obtenu au moyen de deux forces sinusoïdales à angle droit; en acoustique, ce sont les figures de Lissajous; en optique les polarisations elliptique et circulaire; en électricité la production d'un champ tournant par deux bobines à angle droit et traversées par des courants alternatifs déphasés de 90°. Mais ce n'est pas ainsi qu'on procède. Les professeurs de mécanique, d'électricité, d'optique, d'acoustique reprennent chacun à leur compte la démonstration en la particularisant pour leur usage propre — (et il n'y a pas lieu de s'en étonner chacun d'eux étant affecté à un domaine bien délimité dont il n'a pas plus à sortir que les autres ne sont fondés à s'y aventurer). L'inconvénient n'est pas seulement dans de multiples répétitions; il est surtout de masquer des rapprochements, d'enfermer les élèves dans une étroite clôture au détriment d'une formation plus générale et plus féconde, de faire des spécialistes alors que le développement de la technique et de la science exige des esprits ouverts, habitués aux idées d'ensemble,

capables de faire profiter une discipline des progrès acquis par ailleurs.

Ainsi se trouve posé un vaste problème de coordination. Ainsi se trouve définie une méthode qui nous permettra une vue d'ensemble sur un des chapitres les plus importants de la science physique, les oscillations et les phénomènes transitoires dans le cas des systèmes linéaires.

Ce domaine se partagera naturellement en deux autres, celui des systèmes à caractéristiques localisées, représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, et celui des systèmes à caractéristiques réparties d'une façon continue, régis par des équations aux dérivées partielles.

PREMIÈRE PARTIE [1].

I. OSCILLATIONS ET PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES.

CHAPITRE PREMIER.

11. Systèmes a caractéristiques localisées.

111. Systèmes mécaniques voisins de l'état d'équilibre et réseaux électriques.

1111. Systèmes mécaniques voisins de l'état d'équilibre. — Lagrange enseignait que le mouvement d'un système de points matériels défini par r paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_r$ peut être représenté par les r équations dont la $j^{\text{ième}}$ est :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dq_j}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

T est l'énergie cinétique du système, Q_j la force extérieure généralisée correspondant à la coordonnée q_j, telle que

$$\Sigma Q_j \delta q_j$$

représente le travail des forces extérieures pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Séparons dans les forces extérieures la partie Q'_j dépendant d'un potentiel U et la partie Q''_j due aux frottements. Q'_j et Q''_j sont de la forme

$$Q'_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad Q''_j = -\frac{\partial V}{\partial \frac{dq_j}{dt}}.$$

U étant une fonction des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$ et V une fonction du second degré des vitesses Q_j s'écrit

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial \frac{dq_j}{dt}}.$$

Considérons maintenant ce que les mécaniciens, appellent des « petits mouvements », c'est-à-dire des mouvements de faible amplitude autour d'une position d'équilibre stable. Choisissons les q_j de façon qu'ils soient tous nuls pour cet équilibre. Supposons en outre les liaisons indépendantes du temps. Dans ces conditions T, V, U sont des formes quadratiques, les deux premières des vitesses $\frac{dq_j}{dt}$, la troisième des paramètres q_j

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} a_{jk} \frac{dq_j}{dt}\frac{dq_k}{dt},$$

$$V = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} b_{jk} \frac{dq_j}{dt}\frac{dq_k}{dt},$$

$$U = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} c_{jk}\, q_j q_k,$$

avec

$$a_{jk} = a_{kj}, \qquad b_{jk} = b_{kj}, \qquad c_{jk} = c_{kj}.$$

1112. Réseaux électriques. — Soit maintenant un réseau électrique composé de r circuits fixes dont les résistances, les capacités, les mutuelles ou auto-inductances sont indépendantes du courant qui les traverse. Soit, pour le circuit j, i_j l'intensité, q_j le déplacement d'électricité. La forme quadratique

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} a_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} a_{jk} \frac{dq_j}{dt}\frac{dq_k}{dt}$$

($j, k = 1, 2, \ldots, r$), avec $a_{jk} = a_{kj}$, où les a_{jk} sont les mutuelles ou auto-inductances, représente l'énergie

---

[1] L'introduction et un certain nombre de paragraphes de la première partie ont été empruntés à peu près textuellement à une communication faite par l'auteur à la Société française des Électriciens et publiée au *Bulletin* de la Société, n° 62, février 1936.

emmagasinée sous forme magnétique et doit, suivant Maxwell, être considérée comme une énergie cinétique.

La forme quadratique

$$U = \frac{1}{2}\Sigma_{jk} c_{jk} q_j q_k \qquad (\text{avec } c_{jk} = c_{kj}),$$

où les c_{jk} sont les inverses des capacités, représente l'énergie emmagasinée sous forme électrique et doit être considérée comme une énergie potentielle.

Enfin la forme quadratique

$$2V = \Sigma_{jk} b_{jk} i_j i_k = \Sigma b_{jk} \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_k}{dt}$$

(avec $b_{jk} = b_{kj}$) représente l'énergie dissipée dans les résistances et joue le rôle d'une énergie de frottement.

1113. Équations différentielles des réseaux électriques et des systèmes mécaniques voisins de l'état d'équilibre. — Dans les deux cas nous avons trouvé pour les énergies potentielle, cinétique, de frottement des expressions de même forme. Écrivant alors les équations de Lagrange, nous constatons qu'elles constituent le système de r équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants dont la $j^{\text{ième}}$ est

$$(1) \qquad \Sigma_k \left(a_{jk} \frac{d^2 q_k}{dt^2} + b_{jk} \frac{dq_k}{dt} + c_{jk} q_k \right) = F_j,$$

F_j est soit la force mécanique correspondant au paramètre q_j, soit la force électromotrice appliquée au circuit j.

Tous les résultats de l'étude des équations différentielles à coefficients constants s'appliquent donc indifféremment aux réseaux électriques et aux systèmes mécaniques animés de petits mouvements, particulièrement à ceux des systèmes vibrants étudiés en acoustique.

Ainsi les conclusions tirées de l'étude des petits mouvements et des vibrations acoustiques se trouvent étendues aux réseaux électriques.

Mais, d'autre part, toutes les récentes acquisitions de la science des réseaux électriques, en particulier les résultats des études sur les dipôles, les quadripôles, les filtres, ainsi que les méthodes d'investigation des systèmes alternatifs par imaginaires et vecteurs sont, inversement, applicables à la mécanique et à l'acoustique.

Ainsi s'expliquent les analogies électriques de l'acoustique si fort à la mode il y a quelques années, et se trouve justifiée leur utilisation technique. On avait redécouvert, notamment en Amérique, qu'un système vibrant pouvait être assimilé à un réseau électrique, et il était devenu impossible de calculer un appareil de prise de sons ou un organe de phonographe sans établir un modèle électrique et raisonner sur ce dernier, avec la terminologie électrique. On ne se demandait pas s'il y avait là quelque exagération. Car, tout de même, quand il s'agit de masses, de déplacements, de vitesses, de forces, de pressions, notions familières sur lesquelles le raisonnement peut s'appuyer avec de moindres chances de s'égarer, n'est-il pas étrange de leur préférer des inductances, des résistances, des intensités de courant, toutes entités qui ne sont tout de même pas aussi immédiates et tangibles que celles de la mécanique ? C'est le contraire qu'avait fait Maxwell en donnant des modèles mécaniques des phénomènes électriques. Le procédé inverse paraît beaucoup moins naturel.

Pour nous, nous pensons qu'il n'y a lieu ni de ramener la mécanique à l'électricité ni d'essayer l'opération inverse. Mais il est du plus haut intérêt de mettre en évidence leurs aspects communs. Et quand, comme nous l'avons fait ci-dessus, nous avons montré que des phénomènes apparemment divers s'expriment par les mêmes équations, nous estimons avoir réalisé une synthèse féconde qui nous assure un plus large profit de l'exercice de notre faculté la plus précieuse, le raisonnement.

112. Systèmes gyroscopiques.

1121. Systèmes mécaniques. — La mécanique, plus variée que l'électricité, introduit à côté des relations du type 1113-1, d'autres types d'équations différentielles à coefficients constants. Nous allons en étudier un très voisin du précédent, spécialement intéressant en ce qu'il se retrouve dans certains systèmes électromécaniques et intéresse, par conséquent, la technique des machines électriques.

Considérons un gyroscope, constitué par un volant tournant autour de son axe. Si un tel système est isolé dans l'espace, la direction de l'axe reste invariable. Mais si un couple extérieur de moment M agit sur lui l'axe tourne dans un plan contenant le vecteur moment avec la vitesse angulaire $\frac{d\Psi}{dt}$ donnée par la formule

$$\mathfrak{M} = I\omega \frac{d\Psi}{dt},$$

I étant le moment d'inertie et ω la vitesse angulaire de rotation du gyroscope autour de son axe. C'est l'origine du mouvement de précession de la toupie.

D'après la loi de l'action et de la réaction ce

moment doit être équilibré par un couple de réaction produit par le gyroscope, de moment $K = -\mathfrak{M}$.

Supposons l'axe du gyroscope lié rigidement à un solide, par exemple, à la turbine d'un navire. Si, par suite du tangage il tourne avec la vitesse $\frac{d\Psi}{dt}$, le couple K se trouve appliqué au navire et tend à le faire tourner, suivant l'équation fondamentale du mouvement de rotation, avec la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ donnée par

$$I_1 \frac{d\theta}{dt} K = = -I\omega \frac{d\Psi}{dt},$$

I_1 étant le moment d'inertie du navire.

Mais si le navire tourne avec la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ il est, d'après le théorème rappelé ci-dessus, appliqué au gyroscope le couple de moment

$$I\omega \frac{d\theta}{dt}.$$

Il s'introduit ainsi dans l'équation du mouvement du navire (variable θ) le terme

$$b_{\Psi\theta} \frac{d\Psi}{dt} = -I\omega \frac{d\Psi}{dt}$$

et dans celle du mouvement du gyroscope (variable Ψ) le terme

$$b_{\theta\Psi} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\theta}{dt}.$$

Ces deux termes de couplage sont de la forme $b \frac{dq}{dt}$, comme des termes de frottement mais on a

$$b_{\Psi\theta} = -b_{\theta\Psi}.$$

1122. Systèmes électromécaniques a liaison par champ magnétique. — Considérons l'appareil de la figure 1. On y voit, en coupe, un électroaimant formé d'un noyau d'acier complété par une culasse qui se referme autour de lui en ne

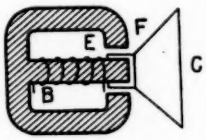


Fig. 1122-1.

laissant qu'un mince entrefer annulaire E. La bobine excitatrice, parcourue par du courant continu, est en B. Un équipage, mobile suivant l'axe du système se compose d'un pavillon tronconique rigide C relié élastiquement par sa grande base à un anneau fixe et portant par sa petite base une petite bobine de fil conducteur placée dans l'entrefer. Supposons cette bobine traversée par un courant téléphonique. Du fait des forces électromagnétiques, l'équipage mobile vibre et produit un son. L'appareil que nous venons de décrire est le haut-parleur dont sont munis tous les postes de réception de radiodiffusion.

Étudions d'abord l'équipage mobile. Les forces appliquées sont d'une part la force $\mathcal{G}$ due à la réaction de l'air, d'autre part la force électromagnétique appliquée à la bobine et qui, d'après la loi de Laplace, est

$$Bli = Bl\frac{dq}{dt},$$

B étant l'induction magnétique dans l'entrefer, l la longueur du fil de la bobine, $i = \frac{dq}{dt}$ l'intensité du courant. Soit m la masse, r le coefficient de résistance mécanique, s le coefficient de raideur, x le déplacement de l'équipage mobile; l'équation du mouvement s'écrit

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + sx - Bl\frac{dq}{dt} = \mathcal{G}.$$

Prenons maintenant le circuit électrique contenant la bobine mobile. Soit L l'auto-inductance, C la capacité, R la résistance ohmique. Les forces électromotrices sont d'une part la force électromotrice extérieure $\mathcal{E}$ appliquée (il n'y en a pas quand l'appareil est employé comme haut-parleur, nous ne l'écrivons que pour ne pas paraître l'oublier et pour donner plus de symétrie aux équations), d'autre part, la force électromotrice d'induction qui prend naissance du fait du déplacement de la bobine dans le champ magnétique de l'entrefer et a pour valeur

$$-Bl\frac{dx}{dt}$$

et enfin la force électromotrice d'auto-inductance de la bobine, égale à

$$-L\frac{di}{dt}.$$

Compte tenu de ces forces électromotrices l'équation de Kirchhoff s'écrit :

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = \mathcal{E} - Bl\frac{dx}{dt} - L\frac{di}{dt},$$

ou, puisque

$$i = \frac{dq}{dt},$$

$$(2) \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + Bl\frac{dx}{dt} = \mathcal{E}.$$

Le système d'équations (1) et (2) définit le fonctionnement électrique et mécanique du système. On voit que les deux termes de couplage, proportionnels aux vitesses des déplacements électrique q et mécanique x, ont des coefficients égaux et de signes contraires, comme dans les systèmes gyroscopiques.

L'examen des machines électriques à induction conduirait de même à un couple d'équations l'une électrique, l'autre mécanique, avec liaisons de l'espèce qui vient d'être définie.

113. Oscillations et phénomènes transitoires.

1130. L'étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont nous avons vu qu'elles représentent, dans de nombreux cas, les mouvements des systèmes mécaniques ou le fonctionnement des réseaux électriques, est une importante question d'analyse. Je ne m'y attarderai pas et me contenterai de rappeler les résultats les plus importants.

1131. Théorème de superposition. — Si les seconds membres F_j sont des sommes de plusieurs termes P_j, Q_j, R_j, ..., les sommes des solutions obtenues en remplaçant les F_j par les P_j, Q_j, R_j, sont des solutions du système d'équations.

Ce théorème permet de ramener la solution du système général 1113-1 à celle d'un système ne possédant de second membre qu'à une seule des équations, tous les autres seconds membres étant égalés à zéro.

1132. Forme classique de la solution. — En particulier la méthode classique d'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants donne la solution sous la forme d'une somme de deux termes. Le premier est la solution du système dans lequel tous les seconds membres ont été égalés à zéro; le second est une solution particulière du système avec seconds membres.

1133. Le terme de régime. Oscillations forcées. — Considérons d'abord cette seconde partie de la solution. Elle est déterminée par les seconds membres, c'est-à-dire, pour les applications qui nous intéressent, par les forces extérieures appliquées, mécaniques ou électromotrices : c'est la solution de régime, celle qui subsiste indépendamment des conditions initiales après que l'effet de celles-ci s'est progressivement éteint.

Deux cas sont particulièrement importants pour la technique, celui d'un second membre constant et celui d'un second membre sinusoïdal.

Second membre constant. — On voit immédiatement, sur le système 1113-1 pris comme exemple, qu'on obtient une solution en faisant dans les équations

$$\frac{d^j}{dt^j} = 0.$$

En égalant ainsi à zéro toutes les dérivées, le système 1113-1 se réduit à

$$\Sigma c_{jk} q_j = F_j,$$

c'est un système de r équations du 1er degré par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_r$ qu'il suffit de résoudre par les méthodes habituelles pour avoir le terme de régime de la solution.

Second membre sinusoïdal. — Dans ce cas la solution de régime a la même forme que le second membre. A des seconds membres oscillants de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, correspondent des solutions oscillantes comme eux et de même fréquence : ce sont des *oscillations forcées.*

Soit

$$q_1 = Q_1 \cos(\omega t - \varphi_1),$$
$$q_2 = Q_2 \cos(\omega t - \varphi_2), \ldots, \qquad q_r = Q_r \cos(\omega t - \varphi_r)$$

ce terme de régime. Pour l'obtenir nous remplaçons $q_1, q_2, \ldots, q_r$ par les valeurs qui viennent d'être écrites dans les équations différentielles données (par exemple 1113-1). Écrivant ensuite que les nouvelles équations sont vérifiées quel que soit t, nous obtenons $2r$ équations qui permettent de déterminer $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$.

On parvient plus rapidement à la solution suivant une technique classique en électricité et qui pourrait rendre des services analogues en optique et en mécanique en remarquant que

$$\mathcal{F} = F \cos(\omega t - \varphi)$$

est la partie réelle de l'imaginaire

$$F[\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)] = F e^{j(\omega t - \varphi)}$$
$$= F e^{-j\varphi} e^{j\omega t} = [\mathcal{F}] e^{j\omega t},$$

en posant

$$[\mathcal{F}] = F e^{-j\varphi};$$

et l'on a

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}[\mathcal{F}] e^{j\omega t},$$

$\mathcal{R}$ signifiant « partie réelle de ».

Écrivons de même

$$q_1 = \mathcal{R}[q_1] e^{j\omega t}, \qquad q_2 = \mathcal{R}[q_2] e^{j\omega t}, \ldots,$$

et remarquons que

$$\frac{dq_1}{dt} = \mathcal{R}\left(j\omega [q_1] e^{j\omega t}\right), \quad \frac{d^2 q_1}{dt} = \mathcal{R}\left(-\omega^2 [q_1] e^{j\omega t}\right), \ldots$$

Remplaçant dans les équations 1113-1 prises comme exemple

$$\mathcal{F},\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ \frac{dq_1}{dt},\ \frac{dq_2}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^2q_1}{dt^2},\ \frac{d^2q_2}{dt^2},\ \ldots,$$

par

$$[\mathcal{F}],\ [q_1],\ [q_2],\ \ldots,\ j\omega[q_1],$$
$$j\omega[q_2],\ \ldots,\ \omega^2[q_1],\ -\omega^2[q_2],\ \ldots,$$

l'équation j prend la forme

$$\Sigma_k[A_{jk}+jB_{jk}][q_k]=[\mathcal{F}_j].$$

C'est un système de r équations à r inconnues qu'on résoud par les méthodes ordinaires et qui donne $[q_1], [q_2], \ldots, [q_r]$ et par conséquent $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$.

Nous venons d'exposer la méthode des imaginaires, classique en électricité. La méthode des vecteurs, elle aussi souvent employée, en est la transposition géométrique.

Nous retrouverons plus loin la méthode des imaginaires dans la seconde partie.

1134. Le terme transitoire. — La partie de la solution que nous venons d'étudier représente le terme de régime, celui qui subsiste après que les effets des conditions initiales se sont progressivement éteints. Elle serait la seule si au moment où les forces $\mathcal{F}_j$ sont appliquées, les caractéristiques du mouvement préexistant étaient les mêmes que celles du régime forcé.

Considérons par exemple un circuit électrique avec capacité C, auto-inductance L, résistance R auquel nous appliquons au temps $t=0$ une force électromotrice $E\sin\omega t$. Le terme de régime, calculé par la méthode qui vient d'être rappelée est pour l'intensité du courant i_2 et pour la différence de potentiel entre les armatures du condensateur u_r

$$i_r=\frac{E\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

$$u_r=-\frac{E}{C\omega}\frac{\cos(\omega t-\varphi)}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Au temps $t=0$ ce courant et cette différence de potentiel auraient les valeurs

$$i_{r0}=-\frac{E\sin\varphi}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

$$u_{r0}=-\frac{E\cos\varphi}{C\omega\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Si, au temps $t=0$, le courant et la différence de potentiel ont les valeurs qui viennent d'être calculées, la transition est toute faite. Les conditions initiales étant celles qui correspondent au terme de régime, il n'y a pas de raison pour que rien s'y ajoute.

Mais il n'en est pas ainsi en général. Quant à l'instant initial, les déplacements et les vitesses n'ont pas les valeurs correspondant à l'état de régime. D'où le terme transitoire de la solution, et le phénomène physique qui lui correspond est le phénomène transitoire.

Ce terme transitoire est une solution des équations différentielles dont les seconds membres ont été annulés. On démontre qu'il est de la forme, pour q_j,

$$q_{jt}=\Sigma_i E_{ij}\,e^{\alpha_i t},$$

les α_i étant réels et négatifs, ou imaginaires à partie réelle négative, ainsi qu'il résulte immédiatement d'ailleurs de considérations physiques, l'énergie mise en jeu étant limitée en l'absence de forces extérieures.

Les termes imaginaires sont conjugués deux à deux; si les b_{jk} des équations 1113-1 sont suffisamment petits, la somme de deux termes conjugués représente une oscillation amortie de la forme

$$A\,e^{-\beta t}\cos(\omega t-\varphi).$$

Quand les b_{jk} tendent vers zéro, il en est de même des β. Il n'y a plus que des termes sinusoïdaux.

Les α_i sont les mêmes pour tous les q_j. Quant aux B_{ij} on les détermine en écrivant que la solution complète (terme de régime + terme transitoire) satisfait aux conditions initiales.

On voit, que dans la méthode classique la détermination des constantes d'intégration, nécessaire pour déterminer les termes transitoires, n'intervient qu'après le calcul du terme de régime et des exposants α_i. Elle exige d'ailleurs le plus souvent de longues opérations. C'est le défaut capital, d'une grande importance en raison de la multiplicité des applications techniques, auquel se propose de remédier la méthode que nous étudierons dans la seconde partie.

114. L'importance et la diversité des applications.

1140. L'importance technique et la diversité des applications des équations linéaires à coefficients constants se manifesteraient davantage encore si nous pouvions en venir aux détails. Il nous suffira, pour en donner une idée, d'examiner quelques problèmes

techniques régis par l'équation simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha x + \varpi^2 x = F(t). \tag{1}$$

1141. Faisons d'abord $\alpha = 0$. L'équation s'écrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varpi^2 x = F(t).$$

11411. *Ressort chargé.* — Considérons une masse m, attachée à un point O par l'intermédiaire d'un ressort et soumise à une force $P(t)$ de direction constante (*fig.* 11411-1). La force appliquée équi-

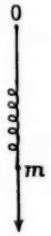


Fig. 11411-1.

libre à tout instant la résistance d'inertie $m\frac{d^2x}{dt^2}$ et la résistance élastique sx, de sorte que l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + sx = P(t).$$

11412. *Régulateur.* — Deux masselottes identiques M_1 M_2, portées par deux bras horizontaux OC_1, OC_2 sont attachées au point O par l'intermédiaire de ressorts identiques. L'ensemble tourne autour de l'axe vertical AB avec la vitesse angulaire α. Pour une vitesse angulaire constante α_0 les masses se fixent à une distance déterminée de l'axe. Si la vitesse change, elles exécutent des oscillations avant de s'établir dans une nouvelle position. On demande d'étudier le mouvement (*fig.* 11412-1).

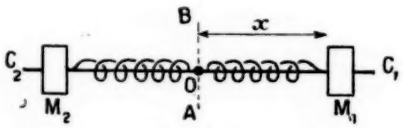


Fig. 11412-1.

Les forces agissant sur une masselotte sont :

a. La force centrifuge $m\alpha^2 x$;

b. La force élastique $-s(x-a)$, a étant la position de repos de la masselotte;

c. La force de frottement $-mgf$, g étant l'intensité de la pesanteur et f le coefficient de frottement. Le signe change avec le sens du mouvement.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$m\frac{dx}{dt^2} + (s - m\alpha^2)x = sa \mp mgf.$$

11413. *Barreau chargé.* — Un barreau élastique de longueur l est supporté à ses deux extrémités. Il est chargé en son milieu d'une masse m grande par rapport à sa propre masse. On exerce sur le barreau un effort supplémentaire F qui fait varier la flexion, puis on abandonne le système à lui-même. On demande de calculer la période des oscillations (*fig.* 11413-1).

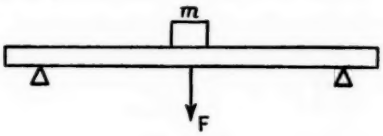


Fig. 11413-1.

Soit x le déplacement du milieu du barreau. A tout moment la force appliquée mg équilibre la résistance d'inertie $m\frac{d^2x}{dt^2}$ et la résistance élastique sx $\left(\text{avec } s = 48\frac{EI}{l^3}\right)$, formule donnée par la théorie de l'élasticité. De sorte que l'équation du mouvement s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + sx = mg.$$

11414. *Oscillations d'une lame encastrée.* — Soit AB une lame encastrée, chargée à son extrémité B d'une masselotte de masse M_2. Soit l la longueur, M_1 la masse, I le coefficient d'inertie de la section de la lame. L'équation des oscillations de l'extrémité,

Fig. 11414-1.

sans force extérieure appliquée, est (*fig.* 11414-1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + sx = 0,$$

avec

$$m = \frac{M_1}{3} + M_2, \qquad s = \frac{3EI}{l^3},$$

Cette lame vibrante est l'élément essentiel du fréquencemètre utilisé dans la technique des courants alternatifs.

11415. *Petites oscillations d'un pendule.* — Je rappelle pour mémoire l'équation des petites oscillations du pendule (*fig.* 11415-1)

$$l\frac{d^2\gamma}{dt^2} + g\gamma = 0,$$

g étant l'accélération de la pesanteur.

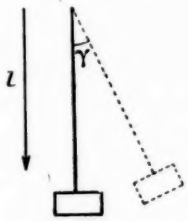


Fig. 11415-1.

Pour le pendule composé l'équation du mouvement est (*fig.* 11415-2).

$$I\frac{d^2\gamma}{dt^2} + gMs\gamma = 0.$$

I est le moment d'inertie autour de l'axe de rotation, s la distance OS du point d'appui au centre de gravité.

Fig. 11415-2.

Parmi les grosses applications signalons le roulis et le tangage des navires.

11416. *Magnétomètre. Boussole des tangentes.* — Considérons une aiguille aimantée suspendue horizontalement par un fil sans torsion et sur laquelle nous faisons agir un champ magnétique H horizontal et perpendiculaire à la composante horizontale h du champ terrestre (*fig.* 11416-1).

Au couple résistant d'inertie $K\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ font équilibre à tout instant les couples appliqués à l'aiguille, soit :

a. Le couple produit par le champ magnétique H,

$$\mathfrak{M} H \cos\gamma.$$

b. Le couple produit par le champ terrestre égal à

$$-\mathfrak{M} h \sin\gamma;$$

si h est la composante horizontale du champ terrestre; l'équation du mouvement s'écrit donc :

$$K\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -h\mathfrak{M}\sin\gamma + \mathfrak{M} H\cos\gamma.$$

Pour de petits déplacements aux environs de $\gamma = 0$ l'équation s'écrit

$$K\frac{d^2\gamma}{dt^2} + h\mathfrak{M}\gamma = \mathfrak{M} H.$$

Quand l'appareil est utilisé pour mesurer un champ H, il reçoit le nom de *magnétomètre.*

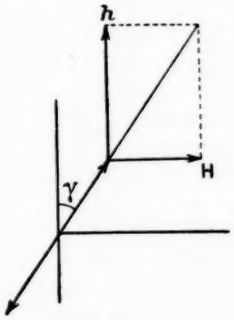


Fig. 11416-1.

Quand le champ H est celui d'une bobine plate de grand rayon parcourue par un courant d'intensité I et placée dans un plan vertical parallèle au champ magnétique terrestre, l'appareil peut servir à mesurer l'intensité I du courant. C'est alors la *boussole des tangentes* de Pouillet.

11417. *Circuit électrique avec capacité et self-inductance.* — Étant donné un circuit électrique composé d'une capacité C et d'une auto-inductance L, on applique au temps t une force électromotrice $E(t)$. On demande l'intensité du courant en fonction du temps.

La force électromotrice appliquée E augmentée de la force électromotrice d'auto-inductance $-L\frac{di}{dt}$ équilibre à chaque instant la différence de potentiel U entre les bornes du condensateur

$$E - L\frac{di}{dt} = U.$$

Puisque

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{C\,dU}{dt},$$

Q étant la charge du condensateur, cette équation est équivalente à

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + U = E(t).$$

1142. Dans un grand nombre de problèmes où α ne peut être négligé, nous allons retrouver l'équation (1140-1).

11421. *Mobile avec inertie et élasticité se déplaçant dans un milieu visqueux.* — Une masse m, soumise à une force P parallèle au déplacement est réunie à un point O par un lien élastique dont le coefficient de raideur est s et se déplace dans un milieu visqueux, avec une résistance rv proportionnelle à la vitesse; l'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + sx = P(t).$$

11422. *Indicateur de Watt.* — Un piston fixé à l'extrémité d'un ressort se déplace dans un cylindre B communiquant avec une enceinte A où règne une pression variable p. Il porte un crayon qui trace une courbe sur une feuille de papier C. Si le mouvement de celle-ci est uniforme et normal au déplacement du piston la courbe représente en fonction du temps la variation de la pression p (*fig.* 11422-1).

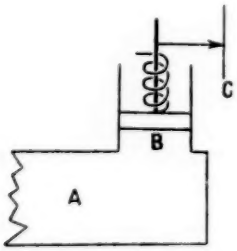


Fig. 11422-1.

L'enceinte A étant le corps de pompe d'une machine à vapeur, le déplacement du papier, s'il est lié au mouvement du piston, est proportionnel au volume v du corps de pompe. La courbe inscrite par le crayon est alors fermée et représente le cycle décrit par la masse de vapeur, dans un diagramme où p est porté en ordonnées et v en abscisses. L'aire du cycle représente le travail de la machine pendant un cycle.

Soit S la section du piston. La force appliquée équilibre à tout instant :

a. La résistance d'inertie $m\frac{d^2x}{dt^2}$;

b. La résistance d'élasticité sx;

c. La résistance de frottement du piston contre les parois, égale à $\pm r$, le signe étant à choisir suivant le sens du mouvement;

d. Une résistance de viscosité égale à $\frac{dx}{dt}$;

l'équation du mouvement s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + sx = pS \pm r,$$

et le problème technique est d'obtenir que x soit à tout moment proportionnel à p.

11423. *Analyse d'un son complexe.* — Étant donné un son complexe, produisant une vibration de l'air représentée par la pression variable $G(t)$, fonction périodique du temps, décomposable en une somme de fonctions sinusoïdales de périodes différentes, utiliser pour la détermination de ces fréquences l'action de la pression variable sur un système mécanique ayant inertie, raideur et résistance visqueuse.

L'équation du mouvement du système est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + sx = AG(t)$$

A étant une constante.

11424. *Système tournant avec inertie, raideur et résistance visqueuse.* — Un équipage mobile autour d'un axe est soumis à un couple variable $C(t)$. Ce couple équilibre à chaque instant :

le couple de résistance d'inertie $I\frac{d^2\gamma}{dt}$, I étant le moment d'inertie,

le couple de résistance visqueuse $R\frac{d\gamma}{dt}$,

le couple d'élasticité, égal à $s\gamma$.

L'équation du mouvement est

$$I\frac{d^2\gamma}{dt^2} + r\frac{d\gamma}{dt} + s\gamma = C(t).$$

11425. *Oscillations de torsion.* — Dans l'expérience de Coulomb sur les oscillations de torsion AB est un fil élastique tendu par un poids P. Le système étant d'abord en équilibre, tournons le poids P d'un petit angle, puis abandonnons-le à lui-même. Des oscillations se produisent. Il n'y a pas de forces

extérieures. L'équation du mouvement est (*fig.* 11425-1)

$$I\frac{d^2\gamma}{dt^2} + R\frac{d\gamma}{dt} + s\gamma = 0,$$

avec

$$s = \frac{\pi E}{64(1+\sigma)}\frac{D^4}{L} \quad \text{(unités C. G. S.)}$$

(E, module d'Young; σ, coefficient de Poisson; D, diamètre du fil; L, longueur du fil).

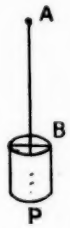


Fig. 11425-1.

11426. *Galvanomètre à cadre.* — Le courant à mesurer passe dans une bobine enroulée sur un cadre rectangulaire suspendu par un fil de torsion dans un entrefer cylindrique où règne un champ magnétique H normal à l'axe de rotation et radial (*fig.* 11426-1). Si la bobine est traversée par le

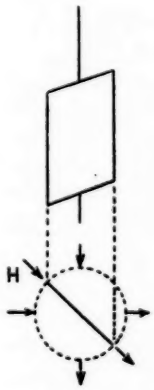


Fig. 11426-1.

courant i, elle est soumise, du fait des forces électromagnétiques, à un couple de moment $nSHi$, S étant la surface du cadre, n le nombre de spires. Ce couple fait équilibre, à chaque moment, aux couples résistants suivants :

1° Couple d'inertie $I\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, I étant le moment d'inertie;

2° Couple d'amortissement par frottement sur l'air

$$K\frac{d\gamma}{dt}.$$

3° Couple d'amortissement dû aux phénomènes d'induction produits par le mouvement du cadre dans le champ magnétique

$$\frac{Hn^2S^2}{\rho}\frac{d\gamma}{dt},$$

ρ étant la résistance du circuit électrique.

4° Couple élastique $s\gamma$ dû à l'élasticité du fil de suspension.

L'équation du mouvement s'écrit

$$I\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left(K + \frac{Hn^2S^2}{\rho}\right)\frac{d\gamma}{dt} + s\gamma = nSHi.$$

En variant la forme du courant à mesurer on obtient divers appareils.

Dans la réalisation destinée à la mesure des courants continus, l'appareil est le galvanomètre *Deprez-d'Arsonval.*

Quand l'équipage mobile est de grande inertie et que le courant est envoyé sous la forme d'une impulsion, l'appareil est utilisé pour la mesure des quantités d'électricité et s'appelle le *galvanomètre balistique.*

Quand l'appareil est utilisé pour la mesure de courants alternatifs et sert à mesurer l'intensité efficace, c'est le *galvanomètre à vibrations.*

Quand, le cadre étant parcouru par un courant variable quelconque, l'appareil est construit de façon que l'angle γ soit à tout instant proportionnel à i, c'est l'*oscillographe de Blondel.*

11427. *Circuit électrique avec auto-inductance L, capacité C et résistance R.* — Une force électromotrice $E(t)$ étant appliquée au temps $t = 0$, on demande l'intensité du courant $i(t)$ et la différence de potentiel $U(t)$ entre les armatures du condensateur.

La force électromotrice $E(t)$, augmentée de la force électromotrice d'auto-induction $-L\frac{di}{dt}$, équilibre à chaque instant les différences de potentiel U entre armatures du condensateur et Ri entre extrémités de la résistance. On a

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri + U.$$

Tenant compte de la relation

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{C\,dU}{dt},$$

cette équation est équivalente à

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = E(t).$$

Les applications sont nombreuses, suivant les conditions initiales et la forme de la force électromotrice appliquée. Signalons les suivantes :

1° Décharge d'un condensateur. C'est le cas d'une force électromotrice nulle, le condensateur étant chargé au temps $t = 0$.

2° Charge d'un condensateur. C'est le cas d'une force électromotrice constante.

3° Action d'un parasite atmosphérique. C'est le cas d'une force électromotrice impulsive.

4° Circuit de courant alternatif sinusoïdal. C'est le cas d'une force électromotrice sinusoïdale.

5° Circuit de courant alternatif non sinusoïdal.

1143. Conclusions. — Les exemples pourraient être multipliés aisément. Ceux qui viennent d'être indiqués, et qui se rapportent à la seule équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \varpi^2 x = F(t)$$

suffisent à donner une idée de la diversité des applications scientifiques ou techniques des équations différentielles linéaires à coefficients constants et de l'importance qui s'attache, en conséquence, à rendre plus aisées leur manipulation et leur solution.

CHAPITRE SECOND.

12. Milieux continus.

121. Équation générale.

Dans le cas des milieux continus les recherches relatives aux oscillations se groupent principalement autour de l'équation aux dérivées partielles du second ordre.

$$(1)\quad \Delta U + A_2(x, y, z)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + A_1(x, y, z)\frac{\partial U}{\partial t} + A_0(x, y, z)\,U = B(x, y, z, t)$$

x, y, z, coordonnées du point considéré du milieu pouvant varier dans un domaine G et Δ étant l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

122. L'équation des télégraphistes.

1220. Considérons une ligne électrique, par exemple un conducteur avec retour par la terre. Appelons L, R, C, G l'auto-inductance, la résistance, la capacité, la perditance par unité de longueur. Soit i l'intensité du courant en un point, U le potentiel.

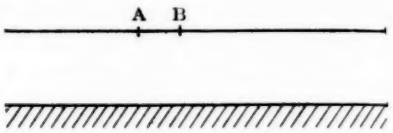


Fig. 122-1.

Entre deux points A et B infiniment voisins la différence de potentiel est, suivant la loi d'Ohm $\left(-L\,dx\frac{\partial I}{\partial t}\right.$ étant la force électromotrice d'auto-inductance$\left.\right)$,

$$U_A - U_B = R\,dx\,I + L\,dx\frac{\partial I}{dt}$$

d'où

$$(11)\qquad -\frac{\partial U}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{dt}.$$

D'autre part le long de l'élément AB il s'échappe par perditance un courant d'intensité $G\,dx\,U$ et par capacité un courant $\frac{dQ}{dt} = C\frac{\partial U}{\partial t}\,dx$ de sorte que

$$-dI = G\,dx\,U + C\,dx\frac{\partial U}{\partial t}$$

ou

$$(12)\qquad -\frac{\partial I}{\partial x} = GU + C\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Dérivant la première équation par rapport à x, il vient

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = R\frac{\partial I}{\partial x} + L\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial I}{\partial x}$$
$$= R\left(-GU - \frac{\partial U}{\partial t}\right) - LG\frac{\partial U}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial U}{\partial t} - RGU = 0,$$

c'est une équation du type 121-1 appelée équation des télégraphistes.

S'il y avait des sources de force électromotrice le long de la ligne, nous aurions à ajouter à l'équation (2) un second membre $\varphi(x, t)$.

L'équation (2) est l'équation de la propagation de l'électricité sur les lignes. C'est autour d'elle que

tourne, depuis un siècle, presque toute la technique des télécommunications.

Supposons $\frac{L}{C} = \frac{R}{G}$. Nous avons un cas particulier très important. On démontre que le potentiel en un point de la ligne supposée indéfinie est une fonction qui s'affaiblit à mesure qu'on s'éloigne de l'origine, l'amortissement étant indépendant de la fréquence. Dans ces conditions un courant de forme quelconque garde sa forme en se propageant; il n'y a pas distorsion : ce sont les meilleures conditions pour la téléphonie : c'est pour les obtenir qu'on charge les câbles téléphoniques en augmentant leur auto-inductance.

D'autres cas particuliers intéressants :

celui où

$$L = 0, \qquad G = 0,$$

et celui où

$$R = 0, \qquad G = 0,$$

seront examinés ci-dessous.

123. L'équation de la diffusion.

1230. Faisons, dans l'équation des télégraphistes (122-2), $L = 0$, $G = 0$. Elle s'écrit

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - RC\frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Nous sommes dans le cas des câbles télégraphiques sous-marins. Le développement de la radio n'empêche pas qu'il y en a encore beaucoup de milliers de kilomètres au fond de l'eau pour assurer les communications entre les continents, et leur étude n'a rien perdu de son importance.

L'équation que nous venons d'obtenir est un cas particulier, pour une seule variable de position x, de la suivante :

$$(2) \qquad \Delta U - A\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

qui, sous le nom d'*équation de la diffusion*, régit d'importants domaines de la physique.

Nous la trouvons d'abord en électricité, où elle définit la transmission de l'électricité dans les conducteurs parfaits. Pour un milieu de pouvoir inducteur spécifique ε, de perméabilité μ, de conductibilité σ, le champ électrique $\overline{E}$ et le champ magnétique $\overline{H}$ sont liés par les équations de Maxwell

$$\overline{\overline{\nabla}\,\overline{E}} = -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

$$\overline{\overline{\nabla}\,\overline{H}} = \varepsilon\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma\overline{E}$$

la notation $\overline{\overline{\nabla}\,\overline{A}}$ signifiant « rotationnel de $\overline{A}$ ». Éliminant $\overline{H}$, par exemple, entre les deux équations, il vient

$$(3) \qquad \Delta\overline{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} - 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0,$$

et en éliminant $\overline{E}$ au lieu de $\overline{H}$ on aurait la même expression pour le champ magnétique.

Dans le cas d'un conducteur parfait, de conductibilité infiniment grande, le second terme du deuxième membre est très grand par rapport au premier et l'équation s'écrit

$$(4) \qquad \Delta\overline{E} - 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0,$$

ce qui est l'équation de la diffusion.

Étudions maintenant la transmission de la chaleur dans une substance où la conductibilité calorifique intérieure est γ. Soit θ la température et dq la quantité de chaleur qui traverse une section ds pendant le temps dt. Elle a pour valeur

$$(5) \qquad dq = -\gamma\,\overline{ds}\,\overline{\nabla}\theta\,dt$$

expression dans laquelle $\overline{ds}$ représente un vecteur égal à ds et normal à l'élément de surface; $\overline{\nabla}\theta$ le vecteur qui a pour composantes $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}$; et $\overline{A}\overline{B}$ la projection du vecteur $\overline{A}$ sur le vecteur $\overline{B}$.

Supposons que, dans un milieu matériel, l'énergie ne varie que par transport de chaleur d'un point à un autre suivant le mécanisme de la conduction. Le principe de la conservation de l'énergie conduit à conclure que la quantité de chaleur contenue dans un élément de volume ne peut se modifier que moyennant échange avec l'extérieur. Cette remarque s'exprime par l'équation

$$(6) \qquad \gamma\Delta\theta - \delta C\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0,$$

(où δ est la densité et C la chaleur spécifique), qui n'est autre que l'équation de la diffusion, laquelle a été introduite dans la physique par Fourier, au début du XIXe siècle, justement à propos de la transmission de la chaleur par conduction.

Nous trouvons encore l'équation (6) de la diffusion dans l'étude importante, en particulier pour les architectes, de l'absorption de l'humidité par les corps poreux; θ est alors la concentration, ou quantité d'eau contenue dans l'unité de volume du corps poreux, δ la masse spécifique de ce corps, γ le coefficient de l'équation (6) qui représente la quantité d'eau passant, pendant le temps dt, à travers une surface ds à l'intérieur du corps poreux.

124. L'équation des ondes.

1240. Reprenons l'équation des télégraphistes et posons

$$R = 0, \qquad G = 0.$$

Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - CL\frac{d^2 U}{dt^2} = 0.$$

C'est, pour le cas d'une seule variable de position x, l'équation des ondes.

Elle a, d'abord en électricité, une grande importance : elle s'applique à la transmission le long des fils quand on néglige la résistance et la perditance, ce qui est légitime dans le cas des grandes fréquences, par exemple pour les antennes de la radioélectricité. On la retrouve en acoustique, où elle prend le nom d'équation des cordes vibrantes et explique les vibrations des cordes, des barreaux, des tuyaux sonores.

Elle n'est qu'un cas particulier de l'équation plus générale, valable pour les systèmes à trois dimensions :

$$\Delta U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

que nous allons trouver en mécanique (et surtout en acoustique), en optique, en électricité.

1241. Ondes mécaniques et acoustiques. — La mécanique des milieux continus conduit dans deux cas à l'équation des ondes.

Cas des fluides. — Supposons que :

a. Il s'agit de petits mouvements;

b. Il s'agit de mouvements propres, c'est-à-dire sans forces extérieures;

c. Il existe entre la pression p et la densité ρ une relation $h(p, \rho) = 0$ valable pour tous les points du milieu;

d. La vitesse dépend d'un potentiel Π.

Dans ces conditions on démontre que la fonction Π satisfait à l'équation des ondes avec

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

C'est, en particulier, le cas de la propagation des ondes acoustiques dans l'air.

Cas des solides élastiques. — Poisson a démontré que les petits mouvements propres des solides élastiques isotropes sont la superposition de deux mouvements :

Dans le premier le déplacement u', v', w' est le gradient d'une fonction Φ $\left(\text{on a } u' = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, v' = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, w' = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$. Quant au rotationnel, il est nul c'est-à-dire que

$$\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0.$$

La fonction Φ et par suite u', v', w' satisfont à l'équation des ondes

$$\Delta\Phi - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Dans le second, le déplacement de composantes u'', v'', w'' (suivant les axes de coordonnées) a sa divergence nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} = 0,$$

et satisfait à l'équation

$$\Delta U - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

U représentant l'une quelconque des composantes u'', v'', w''.

Dans ces formules ρ est la densité, au repos, de l'élément considéré du solide, λ et μ sont des coefficients d'élasticité, reliés au module d'Young E et au coefficient de Poisson σ par les expressions

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Nous avons retrouvé, dans les deux cas, l'équation des ondes.

1242. L'onde lumineuse. — On sait comment Fresnel, reprenant une théorie d'Huygens et combinant la notion d'onde avec celle d'oscillations transversales, expliqua les phénomènes accompagnant la propagation de la lumière : réflexion, réfraction, interférences, polarisation rectiligne, circulaire ou elliptique, polarisation rotatoire, double réfraction, etc.

1243. L'onde électromagnétique. — L'équation 123-3, à laquelle obéissent les champs électrique et magnétique dans un milieu continu devient, si l'on suppose qu'il s'agit d'un diélectrique, par exemple de l'air ($\sigma = 0$),

$$\Delta E - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

C'est encore l'équation des ondes. Nous avons maintenant affaire aux ondes électromagnétiques. On

sait que Maxwell, calculant la vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$, trouva la valeur de la vitesse de la lumière et en déduisit l'identité, toujours confirmée depuis, des ondes électromagnétiques et des ondes lumineuses.

Ainsi étendu du côté des hautes fréquences par les ondes lumineuses, avec leurs prolongements dans l'infrarouge et l'ultraviolet, le domaine des ondes électromagnétiques s'est annexé successivement dans le même sens, au cours du XIXe siècle, les rayons X et les rayons γ.

Sous ses deux formes mécanique et électromagnétique l'équation des ondes domine de vastes régions de la physique. En la prenant comme guide, nous allons voir s'ouvrir de larges horizons.

1244. Ondes stationnaires, ondes progressives. — Quand le déplacement est fonction d'une seule coordonnée (ondes planes), la solution générale de l'équation des ondes a la forme connue

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Elle contient deux ondes se propageant en sens contraires avec la vitesse c.

Si les ondes sont sinusoïdales cette expression s'écrit

$$A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] + B \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \psi\right].$$

Cette superposition de deux ondes constitue les ondes stationnaires qu'on trouve en acoustique dans les cordes, les tiges ou lames vibrantes, les tuyaux sonores, en électricité dans les longues lignes téléphoniques, les antennes de T. S. F. et les expériences de Hertz, en optique dans l'expérience de Wiener et la photographie des couleurs de Lippmann.

Si le milieu est indéfini l'onde de retour $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ n'existe pas. Il ne reste que l'onde progressive qui a une importance considérable et constitue en particulier l'instrument essentiel des radiocommunications, optiques ou électriques.

1245. Interférences. — 1. Deux sources identiques O_1, O_2 donnent à grande distance des effets d'interférence (*fig.* 1).

Si leur distance d est grande par rapport à la longueur d'onde on est dans le cas de l'optique et l'on obtient, au voisinage de $\alpha = 0$, les franges à centre blanc de l'expérience de deux miroirs de Fresnel (sources en phase) ou celles à centre noir de l'expérience des trois miroirs (sources en opposition de phases).

Si la distance $O_1 O_2$ est petite par rapport à la longueur d'onde et les sources en opposition de

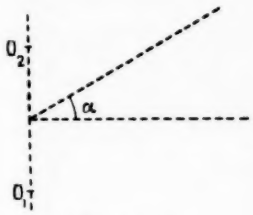


Fig. 1245-1.

phase nous avons en acoustique le cas du diapason et en radioélectricité celui du radiophare. On obtient le diagramme à deux cercles (*fig.* 2) bien

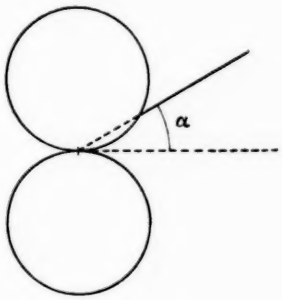


Fig. 1245-2.

connu des radioélectriciens, dans lequel le rayon vecteur représente le champ électromagnétique produit à grande distance en fonction de l'angle α.

2. Soit maintenant une source linéaire et recti-

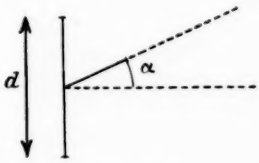


Fig. 1245-3.

ligne de longueur d (*fig.* 3). L'effet dans la direction α est

$$U = A \frac{\sin \pi V}{\pi V}$$

avec

$$V = \frac{d}{\lambda} \sin \alpha.$$

C'est, en optique, l'expérience des franges produites par une fente éclairée en lumière parallèle, en radioélectricité l'antenne en rideau qui, sous différentes formes, constitue un élément essentiel des projecteurs d'ondes ou des sélecteurs de direction des grandes stations radioélectriques.

3. Soit enfin n sources ponctuelles, équidistantes, en ligne droite, identiques à la phase près qui peut varier de φ d'une source à la suivante. L'effet est maximum pour certaines directions privilégiées et sensiblement nul pour les autres directions si n est suffisamment grand. On trouve ce dispositif dans les réseaux de l'optique et dans certaines antennes de télégraphie sans fil, la variation de φ permettant de faire tourner la direction du rayonnement maximum.

1246. Réflexion, réfraction, diffraction. — Qu'il s'agisse de réflexion, de réfraction, de diffraction, que la question se pose en optique, en acoustique, en radioélectricité, le problème est de trouver la modification apportée à une onde progressive par un obstacle interposé.

Si l'obstacle est grand, le phénomène de réflexion intéresse l'effet produit dans le milieu d'incidence, le phénomène de réfraction se passe à l'intérieur de l'obstacle. Si l'obstacle est petit, ou est percé d'ouvertures on parle de diffraction, mais dans tous les cas il s'agit de phénomènes du même ordre, régis par l'équation des ondes.

Dès 1690 Huygens avait tenté d'expliquer par une théorie ondulatoire les particularités de la propagation de la lumière. Fresnel, au début du XIXe siècle, combina l'onde d'Huygens avec le caractère vibratoire du phénomène lumineux et expliqua les interférences et la diffraction.

Mais des difficultés subsistent encore, surtout dans le cas d'obstacles ou d'ouvertures petits par rapport à la longueur d'onde. Il n'en est pas souvent ainsi en optique, sauf dans le domaine des plus longues ondes (infrarouge). Mais le cas est fréquent en radioélectricité et en acoustique : les questions de réflexion, de réfraction, de diffraction sont l'essentiel de l'acoustique architecturale et se posent dans des conditions très complexes puisque les colonnes, les murs, les portions de parois incurvées sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Le problème est alors de chercher la solution de l'équation des ondes satisfaisant aux particularités de la source et aux caractéristiques de l'obstacle ou, pour parler en mathématicien, aux conditions initiales et aux conditions aux limites. Il est le plus souvent très difficile. Quelques questions de diffraction ont été ainsi étudiées soit du point de vue de l'optique, soit de celui de l'acoustique. Mais les résultats s'étendent d'un domaine à l'autre, *mutatis mutandis*.

Et ces théories difficiles sont en réalité très près de la pratique; en acoustique une fente c'est l'ouverture d'une porte; un cylindre, c'est une colonne; un angle, c'est le coin d'une pièce; un segment de sphère ou d'ellipsoïde, c'est une paroi incurvée; une sphère, c'est la tête de celui qui parle ou écoute. En radioélectricité, une sphère, c'est la surface de la terre le long de laquelle se propagent les ondes, ou plutôt puisqu'on ne peut considérer l'atmosphère comme un diélectrique parfait, le problème de la propagation se confond avec celui de la diffraction entre deux obstacles l'un convexe, la terre et l'autre concave constitué par la haute atmosphère ionisée.

L'un des cas les plus simples est celui de la réfraction et de la réflexion à la surface de deux milieux différents. Les applications sont nombreuses et intéressantes : citons, pour la radioélectricité, la réflexion des ondes électromagnétiques sur le sol ou la haute atmosphère, les réflecteurs des grandes antennes, pour les télécommunications les réflexions aux extrémités des lignes ou aux discontinuités de celles-ci, pour l'acoustique les phénomènes d'écho, les réflexions de diverses natures aux extrémités des cordes, des barres, des tuyaux.

Le mirage, c'est-à-dire la propagation d'une onde dans un milieu d'indice variable avec l'altitude a été à l'origine un problème purement optique; mais la méthode d'étude vaut pour l'acoustique : c'est le problème des zones de silence; pour la radioélectricité : c'est par une réfraction progressive dans les couches atmosphériques d'ionisation variable avec la hauteur que les rayons électromagnétiques lancés vers le ciel reviennent au sol agir sur le poste récepteur.

CHAPITRE TROISIÈME.

13. Conclusions.

Comme pour les systèmes à caractéristiques localisées nous aurions pu, en poussant dans le détail, multiplier les exemples.

Dans cette étude, oscillations et phénomènes transitoires tiennent une place considérable.

La vibration forcée, c'est presque toute l'optique physique et toute l'optique industrielle : du fait de la fréquence extrêmement grande des vibrations les phénomènes transitoires sont imperceptibles. C'est presque toute la technique du courant alter-

natif, c'est-à-dire de la production, du transport, de la distribution et de l'utilisation de l'énergie électrique; c'est une grande partie de l'acoustique et de la technique des télécommunications.

Les phénomènes transitoires sont le plus souvent, dans la technique du courant alternatif, insensibles au banal usager de l'électricité; mais ils s'imposent, avec toute leur complexité, à l'ingénieur qui construit les machines, qui transporte ou distribue l'électricité. Dans le transport électrique ou acoustique du son, les salles de spectacle et les studios de radiodiffusion ou de cinéma, il s'agit avant tout de ne pas déformer les oscillations de fréquence et d'amplitude variables qui constituent la parole ou la musique. Mais la parole est coupée de fréquents intervalles de silence, la musique n'existerait pas sans brusques variations de fréquence et d'intensité; il s'ensuit des phénomènes transitoires. Les phénomènes transitoires, c'est eux qui forment les sons de nombreux instruments de musique : phénomènes transitoires, la vibration de la corde du piano sous le choc du marteau, le son de la cloche; phénomènes transitoires, l'effet des parasites sur les postes de T. S. F., la plupart des distorsions qui viennent déformer la parole ou la musique, et tous les auditeurs de la radiodiffusion savent qu'il ne s'agit pas là de vains mots; phénomènes transitoires, presque toute la télégraphie, les signaux étant constitués par de brèves et brusques insertions et suppressions d'une force électromotrice continue ou alternative à l'origine de la ligne; phénomènes transitoires, tous les ennuis que cause aux hydrauliciens l'écoulement des liquides en régime variable.

Tous ces problèmes et bien d'autres relèvent, pour les cas les plus simples, des deux types d'équations que nous avons introduits au cours de cet exposé. C'est dire en un mot toute l'importance technique de celles-ci, tout l'intérêt qui s'attache au perfectionnement des méthodes permettant de les étudier, de les manipuler, de les résoudre. Ces méthodes ont été récemment l'objet d'importantes améliorations, qui seront le thème de la seconde partie de cet exposé.

DEUXIÈME PARTIE.

2. APPLICATION DES TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET DE CAUCHY A L'ÉTUDE DES OSCILLATIONS ET DES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES.

20. L'étude des systèmes mécaniques ou électriques linéaires esquissée au cours de la première partie nous a conduits à représenter leur fonctionnement par deux types d'équations différentielles.

1° Des équations différentielles linéaires à coefficients constants pour les systèmes à caractéristiques localisées.

2° Des équations aux dérivées partielles pour les systèmes à caractéristiques réparties d'une façon continue, autrement dit pour les milieux continus.

Nous avons mis en relief le principal inconvénient de la méthode classique de résolution des équations différentielles linéaires, celui d'exiger de longs calculs pour la détermination des constantes d'intégration, éléments constitutifs de l'expression des phénomènes transitoires.

Nous avons également insisté sur l'importance des problèmes scientifiques et techniques se rattachant à l'étude des oscillations et des phénomènes de transition et rendu évident par là même l'intérêt de faire plus aisées, plus rapides, plus accessibles la manipulation et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants et des équations aux dérivées partielles. C'est des perfectionnements récemment acquis dans cette voie que nous allons maintenant nous occuper.

La méthode que nous étudierons a été lancée en 1892 par Heaviside, ingénieur de l'Administration anglaise des Télégraphes; celui-ci donna, sans justification mathématique, en se fiant à son génie intuitif appuyé sur des considérations physiques, des règles de calcul de certains phénomènes transitoires. Les mathématiciens regardèrent d'abord d'un œil amusé et dédaigneux cette façon originale de s'introduire dans ce qu'ils considéraient comme un domaine réservé. Cependant, avec sa part d'incertitude, avec son nom de calcul symbolique, avec son vague attrait de mystère, mais aussi avec ses incontestables succès, la méthode nouvelle fit des adeptes. Finalement les choses se sont précisées;

les mathématiciens se sont ralliés à la théorie pour l'étendre, la perfectionner, lui donner la rigueur qui lui manquait; il n'y a plus maintenant de calcul symbolique, mais un procédé de traitement utilisant deux transformations fonctionnelles suivant une technique assise sur des bases solides.

CHAPITRE PREMIER.

21. Rappel de quelques définitions et résultats de la théorie des fonctions de variables complexes.

211. **Définitions.**

2111. Fonction de variables complexes. — Étant donné une variable complexe que nous appellerons p

$$p = x + jy,$$

on dit qu'une autre variable complexe

$$u = v + jw$$

est fonction de la première si elle est connue quand la première est donnée.

Dans le plan de Cauchy (*fig.* 1) p est représentée par le point p d'abscisse x et d'ordonnée y (axes de

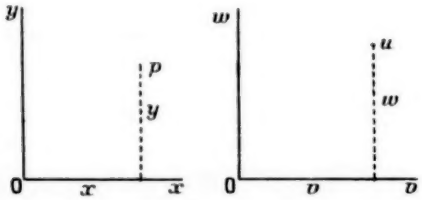


Fig. 2111-1.

cordonnées Ox et Oy rectangulaires), et u par le point u de cordonnées v et w (axes Ov et Ow).

Une fonction est dite *uniforme* si elle n'a qu'une valeur pour une valeur donnée de la variable. Dans le cas contraire elle est dite *multiforme*.

Sous certaines conditions une fonction uniforme $f(p)$ (ou l'une des valeurs si la fonction est multiforme) a une dérivée, définie comme la limite, quand h tend vers zéro, de

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

On dit que la fonction est *monogène* quand cette limite existe et est indépendante de la façon dont h tend vers zéro.

Une fonction monogène dont la dérivée est continue est dite *analytique*.

Une fonction analytique uniforme est dite *holomorphe*.

2112. Singularités. — Nous ne considérons que des fonctions holomorphes dans un domaine déterminé, à l'exception de certains points qui sont appelés *points singuliers*, ou *singularités*, et se répartissent en :

21121. *Pôles.* — Un pôle a est un point singulier pour lequel :

a. $f(p)$ est infini;

b. $\frac{1}{f(p)}$ est holomorphe.

Si, pour $p = a$ la fonction est infiniment grande d'ordre n, le pôle est dit *multiple d'ordre n*.

21122. *Point singulier essentiel.* — C'est un point singulier :

a. Pour lequel $f(p)$ est infini;

b. Qui est un point singulier de $\frac{1}{f(p)}$.

21123. *Points de branchement.* — Nous avons supposé jusqu'ici des points singuliers aux environs desquels la fonction n'a qu'une détermination. Considérons maintenant le cas d'une fonction dite *polydrôme autour d'un point donné*. Soit a ce point. Partant d'un point voisin b du plan de Cauchy, décrivons une courbe fermée autour de a. Si, en revenant à b la fonction n'a pas la même valeur qu'au départ, on dit qu'elle est *polydrôme* et le point a est dit *point de branchement*.

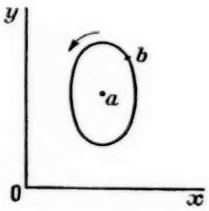


Fig. 21123-1.

Si, au bout de n tours on retrouve la même valeur qu'au départ on dit que la courbe comporte n branches.

J'illustre cette définition sur l'exemple de la fonction

$$u = p^{\frac{1}{m}}$$

avec $m = 12$. Écrivons p et u sous la forme imaginaire

$$p = x + jy = \rho(\cos\alpha + j\sin\alpha),$$
$$u = v + jw = \rho^{\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{\alpha}{12} + j\sin\frac{\alpha}{12}\right).$$

Pour étudier la fonction autour de l'origine déplaçons le point p autour du point O sur le cercle A de rayon ρ; α variant, l'argument $\frac{\alpha}{12}$ de u varie en même temps et le point u se déplace sur le cercle de rayon $\rho^{\frac{1}{12}}$ (cercle B) dans le plan Ovw, que

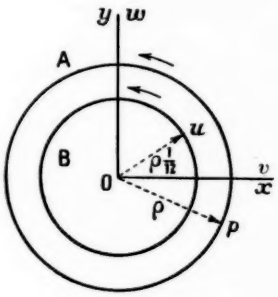


Fig. 21123-2.

nous superposons au plan Oxy. Quand p tourne d'un angle α, u tourne de l'angle $\frac{\alpha}{12}$. Si p est l'extrémité de l'aiguille des minutes d'une horloge, u est l'extrémité de l'aiguille des heures. Quand la première a fait un tour complet, c'est-à-dire est revenue au même point, la seconde n'a avancé que de $1/12^e$ de tour. Le point O est donc un point de branchement. Il faut 12 tours de l'aiguille des minutes pour que l'aiguille des heures se retrouve dans la même position. Nous avons affaire à une fonction à 12 branches.

Pour isoler une des branches, pour laquelle la fonction pourra être considérée comme holomorphe, il nous suffira de tracer sur le cadran de l'horloge une ligne partant de O que nous nous interdirons de franchir (c'est ce qu'on appelle une coupure), et de considérer l'une des déterminations de u. Il est clair que, dans ces conditions, la fonction est devenue uniforme. Étant analytique, elle est devenue holomorphe.

2113. Intégrale. — Supposons que la variable p décrive une portion de courbe L de p_0 à p_n dans une région du plan de Cauchy où la fonction $f(p)$ est holomorphe. Divisons la courbe en éléments infiniment petits par des points infiniment rapprochés $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-1}$ et marquons dans chacun des éléments un point (points $q_0, q_1, \ldots, q_n$). La somme

$$S = (\varpi_1 - p_0)f(q_0) + (\varpi_2 - \varpi_1)f(q_1) + \ldots + (p_n - \varpi_{n-1})f(q_{n-1})$$

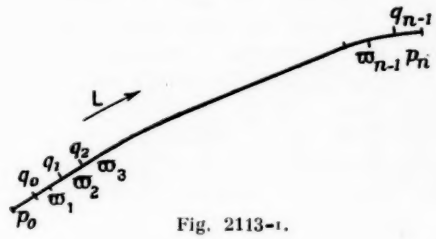


Fig. 2113-1.

tend vers une limite qui est par définition l'*intégrale* de $f(p)$ le long du chemin considéré et qu'on écrit

$$\int_L f(p)\,dp \quad \text{ou} \quad \int_{p_0}^{p_n} f(p)\,dp.$$

Nous supposerons toujours les contours fermés décrits dans le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre.

212. Théorèmes de Cauchy.

2121. Théorème fondamental de Cauchy. — Supposons $f(p)$ holomorphe dans un domaine connexe et limité par un seul contour. L'intégrale

$$\int_C f(p)\,dp$$

étendue à un contour fermé C quelconque situé dans ce domaine est nulle.

2122. Supposons $f(p)$ holomorphe dans un domaine connexe.

L'intégrale

$$\int_{p_0}^{p} f(p)\,dp$$

prise le long d'un chemin allant de p_0 à p ne dépend pas d'une déformation continue du chemin d'intégration pourvu que celui-ci reste constamment dans le domaine où la fonction est holomorphe.

2123. Théorème des résidus. — On appelle *résidu* R de $f(p)$ relatif à un pôle ou point singulier essentiel à l'intégrale

$$R = \frac{1}{2\pi j}\int_C f(p)\,dp$$

prise le long d'un contour γ, entourant le point a et pouvant devenir infiniment petit en se déformant dans le domaine où la fonction est holomorphe.

L'intégrale $\int_C f(p)\,\mathrm{d}p$ *prise le long d'un contour fermé entourant le pôle ou point singulier a et n'en contenant pas d'autre est égale au résidu multiplié par $2\pi j$.*

Ce théorème s'étend immédiatement au cas d'un contour entourant plusieurs pôles ou points singuliers essentiels. Soit $f(p)$ une fonction uniforme dans une région Ω où elle n'a que des pôles ou des points singuliers essentiels et holomorphe sur un contour simple C tracé dans ce domaine, l'*intégrale*

$$\int_C f(p)\,\mathrm{d}p$$

est égale au produit par $2\pi j$ de la somme des résidus de la fonction relatifs aux points singuliers contenus à l'intérieur du contour C

$$\int_C f(p)\,\mathrm{d}p = 2\pi j \times \Sigma R.$$

2131. Quelques règles du calcul des résidus.

2131. Série de Laurent. — Considérons une fonction $f(p)$, holomorphe à l'intérieur et sur les bords d'une couronne circulaire ayant pour centre un point a du plan de Cauchy (cercle intérieur C,

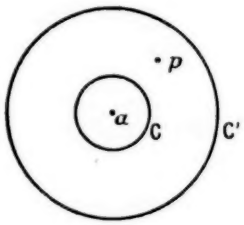


Fig. 2131-1.

cercle extérieur C') (*fig.* 1). Soit p un point de la couronne. On démontre que

$$f(p) = A_0 + A_1(p-a) + \ldots + A_n(p-a)^n + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{p-a} + \ldots + \frac{B_n}{(p-a)^n} + \ldots.$$

Les termes de la seconde ligne n'existent que si a est un point singulier. Si c'est un pôle d'ordre n on a

$$B_{n+1} = B_{n+2} = \ldots = 0.$$

Si c'est un point singulier essentiel la série est illimitée.

Les coefficients se calculent par les intégrales

$$A_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(p)}{(p-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}p,$$
$$B_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C f(p)(p-a)^{n-1}\,\mathrm{d}p.$$

En particulier

$$(1) \qquad B_1 = \frac{1}{2\pi j}\int_C f(p)\,\mathrm{d}p$$

c'est le résidu relatif au point a.

2132. Si a est un pole d'ordre n de $f(p)$, on a

$$(1) \qquad R = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}p^{n-1}}[(p-a)^n f(p)]\right\}_{p=a}.$$

Si en outre $f(p)$ est donné sous la forme

$$f(p) = \frac{e(p)}{(p-a)^n c(p)},$$

on a, a étant un pôle d'ordre n,

$$R = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}p^{n-1}}\left(\frac{e(p)}{c(p)}\right).$$

Si

$$f(p) = \frac{e(p)}{g(p)},$$

$e(p)$ et $g(p)$ étant holomorphes même pour $p = a$, supposons les développés en série de Taylor :

$$e(p) = a_0 + a_1(p-a) + a_2(p-a)^2 + \ldots$$
$$g(p) = (p-a)^n[b_0 + b_1(p-a) + b_2(p-a)^2 + \ldots].$$

Le résidu R est le terme en $(p-a)^{n-1}$ du quotient

$$\frac{a_0 + a_1(p-a) + a_2(p-a)^2 + \ldots}{b_0 + b_1(p-a) + b_2(p-a)^2 + \ldots}.$$

2133. Dans le cas d'un pôle simple a il vient :

$$(1) \quad R = \frac{e(a)}{g'(a)} \qquad \text{si } f(p) = \frac{e(p)}{g(p)}$$

$$(2) \quad R = \frac{e(a)}{c(a)} \qquad \text{si } f(p) = \frac{e(p)}{(p-a)c(p)}$$

$$(3) \quad R = \frac{a_0}{b_0} \qquad \text{si } f(p) = \frac{a_0 + a_1(p-a) + \ldots}{(p-a)(b_0 + b_1(p-a) + \ldots)}.$$

CHAPITRE SECOND.

22. Les transformations de Laplace et de Cauchy et le théorème d'inversion.

221. La transformation de Laplace.

2210. Nous considérons une fonction $F(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est définie pour $t > 0$ et réel;

2° Elle est intégrable et limitée dans tout intervalle fini limité par deux valeurs positives de la variable;

3° L'intégrale $\int_{\varepsilon}^{T} F(t)$ tend vers une limite quand ε tend vers zéro (T étant supposé positif);

4° L'intégrale

$$1) \quad \int_{0}^{\infty} F(t)\, e^{-pt}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \omega \to \infty} \int_{\varepsilon}^{\omega} F(t)\, e^{-pt}\, dt$$

existe, ε et ω étant supposés tendre indépendamment l'un de l'autre, le premier vers zéro, le second vers l'infini.

L'intégrale (1) sera appelée ci-dessous *intégrale de Laplace*. Si p varie, cette intégrale est une fonction de p, que nous noterons $f(p)$ et que nous dirons déduite de $F(t)$ par la *transformation de Laplace*.

A une fonction $F(t)$ correspond par la transformation de Laplace une seule fonction $f(p)$.

Nous désignerons la transformation de Laplace par le symbole $\sqsubset$ et écrirons $f(p) \sqsubset F(t)$.

On démontre que, les conditions énumérées au paragraphe 221 étant supposées remplies :

a. Si l'intégrale de Laplace est convergente pour $p = p_0$, elle est convergente pour toute valeur de p telle que

$$\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0 \qquad (\mathcal{R} = \text{partie réele de}\ldots)$$

c'est-à-dire dans tout le demi-plan de Cauchy situé à droite de la parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $\mathcal{R}p_0$.

b. Si l'intégrale de Laplace est absolument convergente pour $p = p_1$, elle possède la même propriété pour toute valeur de p telle que

$$\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_1.$$

c'est-à-dire dans tout le demi-plan de Cauchy situé à droite d'une parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $\mathcal{R}p_1$.

On a évidemment

$$\mathcal{R}p_0 < \mathcal{R}p_1.$$

Il s'ensuit que les régions de convergence et éventuellement de convergence absolue de l'intégrale de Laplace sont des demi-plans situés à droite de parallèles à l'axe imaginaire et d'abscisses respectives $\mathcal{R}p_0$ et éventuellement $\mathcal{R}p_1$.

$\mathcal{R}p_0$ et $\mathcal{R}p_1$ peuvent avoir suivant le cas une valeur quelconque, comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

c. A l'intérieur du demi-plan de convergence ($\mathcal{R}p > \mathcal{R}p_0$), $f(p)$ est régulier, c'est-à-dire dérivable en tout point au sens complexe autant de fois qu'on le veut et l'on a

$$f^{(n)}(p) \sqsubset (-1)^n t^n F(t).$$

d. Quand $\mathcal{R}p$ tend vers l'infini $f(p)$ tend vers zéro.

222. La transformation de Cauchy.

2220. Étant donné une fonction $f(p)$ d'une varaible complexe p

$$p = u + jv, \qquad j = \sqrt{-1}.$$

Nous considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} f(p)\, dp$$

prise le long de la droite AB d'abscisse c et parallèle à l'axe des imaginaires.

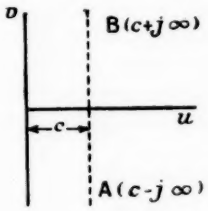


Fig. 222-1.

Cette intégrale est appelée souvent intégrale de Bromwich-Wagner ou intégrale de Mellin. On pourrait, avec plus de raison, lui donner le nom d'intégrale de Giorgi, ce savant étant le premier qui l'ait introduite dans la théorie dont nous nous occupons. Remontant à l'origine de la théorie des fonctions de variables complexes nous dirons « intégrale de Cauchy ».

Quand elle existe elle permet de définir la fonction $F(t)$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} f(p)\, dp$$

que nous dirons déduite de $g(p)$ par la *transformation de Cauchy*.

Nous désignerons la transformation de Cauchy par le symbole $\sqsupset$ et nous écrirons

$$F(t) \sqsupset f(p).$$

223. Le théorème d'inversion de Laplace-Cauchy.

2231. Théorème 1. — La fonction $F(t)$ étant supposée satisfaire aux conditions énoncées au

paragraphe 211 auxquelles nous ajouterons les suivantes :

a. L'intégrale de Laplace est absolument convergente;

b. $F(t)$ est une fonction continue de t, sauf éventuellement en des points isolés en nombre fini.

Considérons une fonction $f(p)$ de la variable complexe p telle que :

a. elle est continue pour les valeurs de p situées à droite de AB (§ 212) dans le plan de Cauchy ($\mathcal{R}p < c < 0$); toutes ses singularités sont supposées à gauche de AB;

b. l'intégrale

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} |f(p)|\,\mathrm{d}p$$

est convergente;

c. $|f(p)|$ tend uniformément vers zéro quand $\mathcal{R}p$, supposé positif, augmente indéfiniment;

on démontre que, dans ces conditions, *si $f(p)$ est obtenu à partir de $F(t)$ par la transformation de Laplace, $F(t)$ est fourni, à partir de $f(p)$ par la transformation de Cauchy. Ces deux transformations sont inverses et l'on a à la fois*

$$f(p) \sqsubset f(t),$$
$$F(t) \sqsupset f(p).$$

Dans la suite, les deux fonctions de t et de p qui se correspondent par inversion seront en général désignées par la même lettre écrite, pour la première sous forme de majuscule [par exemple $F(t)$] et la seconde sous sa forme miniscule [par exemple $f(p)$].

D'autres théorèmes d'inversion peuvent être énoncés. Par exemple :

2232. Théorème 2. — Étant supposé que :

a. l'intégrale de Laplace de $F(t)$ est simplement convergente pour $p = p_0$;

b. $F(t)$ est continu pour $t > T$;

l'intégrale de Cauchy de $f(p)$ est convergente pour $t < T$ et uniformément convergente dans tout intervalle fini.

Dans ces conditions les deux fonctions $f(p)$ et $F(t)$ sont inverses au sens indiqué à propos du Théorème 1.

2233. Théorème 3. — Si, pour $t > 0$, $F(t)$;

a. est intégrable dans tout intervalle fini, à l'exception éventuellement d'un nombre fini de points;

b. est tel que l'intégrale de Laplace soit absolument convergente pour $t > c$;

c. est de variation limitée aux environs de t;

on a les formules d'inversion :

$$f(p) = \int_0^\infty F(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi j}\,{}^{\star}\!\!\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

le signe $\star$ placé en haut et à gauche de l'intégrale signifiant que

$${}^{\star}\!\!\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} = \lim_{U\to\infty}\int_{c-jU}^{c+jU}$$

c étant constant.

2234. Théorème 4. — Étant supposé que :

a. $f(p)$ est régulier dans tout le plan de Cauchy à l'exception de pôles s_ν;

b. tous les pôles sont supposés à gauche d'une droite AB parallèle à l'axe imaginaire.

Il y a réciprocité entre $F(t)$ et $f(p)$ au sens défini dans le Théorème 3.

2235. Autres cas de réciprocité. — Il existe d'autres cas de réciprocité.

Considérons par exemple l'importante fonction « impulsion », définie par la condition que

$$\int_0^\varepsilon F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad t > 0$$

ε étant infiniment petit. Il lui correspond la fonction

$$f(p) = 1.$$

2236. Remarque. — Si à une fonction $F(t)$ correspond toujours par la transformation de Laplace une seule fonction $f(p)$, il peut par la transformation de Cauchy, correspondre plusieurs fonctions $F(t)$ à une seule fonction $f(p)$: c'est par exemple le cas pour la fonction impulsion. Mais ce manque d'uniformité est sans inconvénient en général, deux fonctions $F(t)$, correspondant à une même fonction $F(t)$ ne différant que par une fonction dite fonction zéro, c'est-à-dire telle que

$$\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

quel que soit t. Ainsi, si l'on connaît la transformée de Cauchy d'une fonction $f(p)$ on connaît toutes les autres; on les obtient en ajoutant une fonction zéro quelconque. Si d'ailleurs $F(t)$ est continu, les fonctions zéro s'annulent.

23. CHAPITRE TROISIÈME.

CALCUL DES COUPLES DE FONCTIONS ASSOCIÉES.

231. Quelques règles de calcul.

2310. Le Tableau I rassemble quelques règles qui facilitent le calcul des fonctions associées.

Les plus importantes pour les applications sont la règle de dérivation (nos 7 et 8) et la règle d'intégration (no 13) qui permettent, comme nous le verrons, d' « algébriser » les équations différentielles ou intégrales à coefficients constants;

la règle d'addition (no 18) qui donne le moyen de déduire le développement en série d'une fonction $F(t)$ ou $f(p)$ du développement en série de la fonction $f(p)$ ou $F(t)$ correspondante;

la règle du produit de composition, qui donne la transformée de Cauchy d'un produit de deux fonctions $f(p)$ et $g(p)$.

232. Étant donné $F(t)$, calculer $f(p)$.

2320. Nous ne dirons rien ici sur le calcul de $f(p)$ par la transformation de Laplace

$$f(p) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-pt}\, dt$$

qui n'est autre qu'un calcul d'intégrale suivant les règles ordinaires.

233. Étant donné $f(p)$, calculer $F(t)$.

2330. L'opération inverse, c'est-à-dire le passage de $f(p)$ à $F(t)$ par la transformation de Cauchy,

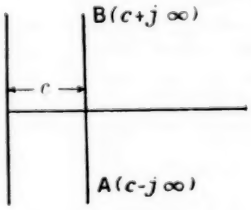


Fig. 233-1.

exige le calcul d'une intégrale de la fonction de variable complexe $f(p)$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp$$

le long de la droite AB parallèle à l'axe imaginaire et d'abscisse égale à c.

Quelques remarques sont de nature à faciliter le calcul.

1. Supposons nulle l'intégrale $\int f(p) e^{pt}\, dp$ prise le long de l'axe de cercle BCA de rayon infini (*fig.* 233-2).

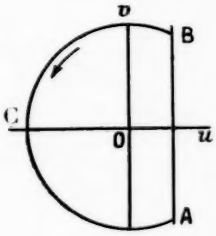


Fig. 233-2.

On a

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(t)\, e^{pt}\, dp = \int_L f(p)\, e^{pt}\, dp$$

l'intégrale du second nombre étant étendue au contour L, formé par la droite AB et l'arc de cercle BCA. Mais ce contour fermé contient toutes les singularités de la fonction. L'intégrale est donc égale à la somme des résidus et l'on a finalement

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(t)\, e^{pt}\, dp = \Sigma \text{ (résidus)}.$$

En particulier l'intégrale prise le long de l'arc de cercle BCA est nulle si le module $|pf(t)e^{pt}|$ tend vers zéro quand le module de p tend vers l'infini.

2. L'évaluation de l'intégrale

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp$$

est parfois facilitée par la substitution à la droite AB de chemins d'intégration équivalents. Un chemin L tracé arbitrairement dans le plan de Cauchy (*fig.* 233-3) sera équivalent à la droite AB :

a, si il part du point A $(c - j\infty)$ pour arriver au point B $(c + j\infty)$,

b, et si le contour fermé constitué par la droite AB et le chemin L pris en sens inverse ne contient aucune singularité.

Ainsi :

Si tous les points singuliers sont à gauche de AB, l'arc de cercle ADB de rayon infini et de centre O situé à droite de AB (*fig.* 233-5) est équivalent à AB.

S'il n'y a de points singuliers qu'à gauche de l'axe imaginaire, cet axe est équivalent à AB.

S'il n'y a de points singuliers qu'à gauche de l'axe imaginaire et à l'origine, le chemin CDEFG (*fig.* 233-4) est équivalent à ABCD (CD et FG sont des portions de l'axe imaginaire; DEF est un demi-cercle de rayon infiniment petit ayant pour centre l'origine).

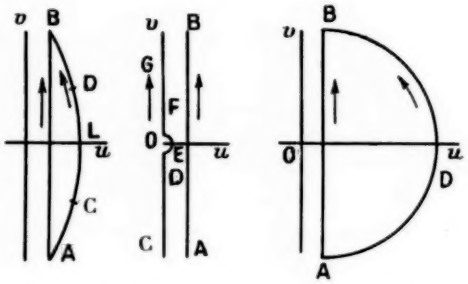


Fig. 233-3. Fig. 233-4. Fig. 233-5.

Si, aucun point singulier n'étant contenu dans le contour ABDCA (*fig.* 233-3) l'intégrale est nulle le long des portions CA et DB. On a

$$\int_{AB} = \int_{CD}.$$

3. *Supposons qu'il existe des points de branchement.* — Soit une fonction possédant un point de branchement C à distance finie (et un autre à l'infini puisqu'il y a toujours au moins deux points de branchement). Tout ce qui vient d'être dit subsiste à condition de s'interdire de traverser une coupure partant de C et aboutissant à l'infini.

Si, par exemple, (*fig.* 233-6), la fonction n'a pas d'autre point singulier le chemin direct AB peut être

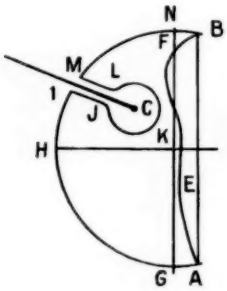


Fig. 233-6.

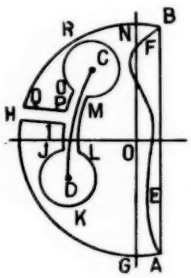


Fig. 233-7.

remplacé par tout autre chemin tel que AEFB partant de A pour aboutir en B et ne traversant pas la coupure; il peut l'être par le chemin AGHIJKLMNB constitué par :

a. l'arc de cercle AGHI de centre O et de rayon infini;

b. le chemin IJKLM, composé de parties parallèles à la coupure et infiniment voisines de celle-ci et d'un cercle de rayon infiniment petit ayant pour centre le point de branchement;

c. l'arc de cercle MNB de rayon infini.

Si les intégrales

$$\int_{AGHI} \quad \text{et} \quad \int_{MNB}$$

sont nulles il reste

$$\int_{AB} = \int_{IJKLM}$$

Les remarques qui précèdent s'appliquent au cas où il y a plusieurs points de branchement. Si, par exemple une fonction $f(p)$ n'a pas d'autre singularité que deux points de branchement C et D le chemin direct AB peut être remplacé par un chemin quelconque ne traversant pas la coupure, par exemple AEFB ou AGHIJKLMNOPQRB (*fig.* 233-7).

234. Couples de fonctions associées.

2340. L'étude détaillée de la validité du théorème de correspondance et du calcul des intégrales de Laplace et de Cauchy exigerait bien d'autres développements. Ce qui en a été dit suffit à démontrer que le calcul des couples de fonctions associées ne va pas sans soulever parfois des problèmes délicats. Heureusement pour les techniciens, les mathématiciens ont travaillé et il existe maintenant de nombreuses listes. Citons en particulier celle qu'ont publiée P. Humbert et N. W. Mac-Lachlan (*Formulaire pour le calcul d'Heaviside*, Gauthier-Villars, Paris, 1939), qui contient plus de 700 couples. Le Tableau II rassemble les plus utiles.

Il est important de signaler que la plupart des formulaires, et surtout de ceux publiés en langue anglaise, font correspondre à la fonction $F(t)$, non celle qui est donnée par l'intégrale

$$f(p) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

mais celle qui est fournie par la relation

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty F(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

On a, par conséquent,

$$f(p) = \frac{\varphi(p)}{p},$$

et il y a lieu, pour obtenir $f(p)$, de diviser par p la fonction de p donnée par ces formulaires.

CHAPITRE QUATRIÈME.

24. Intégration des équations différentielles linéaires a coefficients constants.

241. Introduction.

2410. Nous abordons maintenant l'application la plus importante pour les techniciens des transformations de Laplace et de Cauchy.

Nous avons vu que les équations différentielles linéaires à coefficients constants représentent tous les petits mouvements de la mécanique des systèmes à caractéristiques localisées, qu'elles sont à la base de nombreux systèmes acoustiques, qu'elles expriment les relations fondamentales des réseaux et des machines électriques. Elles commandent donc de vastes domaines de la technique. Il est d'une importance considérable d'en faciliter le maniement, d'en simplifier le traitement, d'en rendre la solution plus rapide.

Nous avons rappelé l'intérêt spécial des régimes transitoires. Or, si la méthode classique donne assez rapidement la solution de régime, correspondant à ce qui se passe quand, la force extérieure étant appliquée depuis longtemps, l'effet des conditions initiales est devenu insensible, elle ne fournit les termes transitoires qu'après de longs détours. Nous constaterons que l'emploi des transformations de Laplace et de Cauchy représente un progrès considérable par la rapidité, la facilité et l'élégance avec laquelle les résultats sont obtenus.

242. Méthode d'intégration.

2421. Principe de la méthode. — L'opération caractéristique de la méthode, celle qui en fait le succès, est la transformation (nos 7 et 8 du Tableau I) :

$$\frac{d\,F(t)}{dt} \sqsupset -F_0 + p\,f(p),$$

$$\frac{d^n F(t)}{dt^n} \sqsupset -(F_0^{(n-1)} + p\,F_0^{(n-2)} + \ldots + p^{n-1}F_0) + p^n f(p),$$

par laquelle les dérivées sont « algébrisées ».

Un système d'équations différentielles à coefficients constants où les fonctions à calculer sont $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., $G_n(t)$ a par suite pour correspondant, après la transformation de Laplace, un système d'équations algébriques du premier degré dont les inconnues sont $g_1(p)$, $g_2(p)$, ..., $g_n(p)$. La résolution de ces équations donne

$$g_1(p),\quad g_2(p),\quad \ldots,\quad g_n(p)$$

auxquels il suffit d'appliquer la transformation de Cauchy pour obtenir la solution cherchée :

$$G_1(t),\quad G_2(t),\quad \ldots,\quad G_n(t).$$

Le plus souvent, les deux transformations de Laplace et de Cauchy se réduisent à la lecture, dans un formulaire des fonctions associées aux fonctions en t ou en p à transformer.

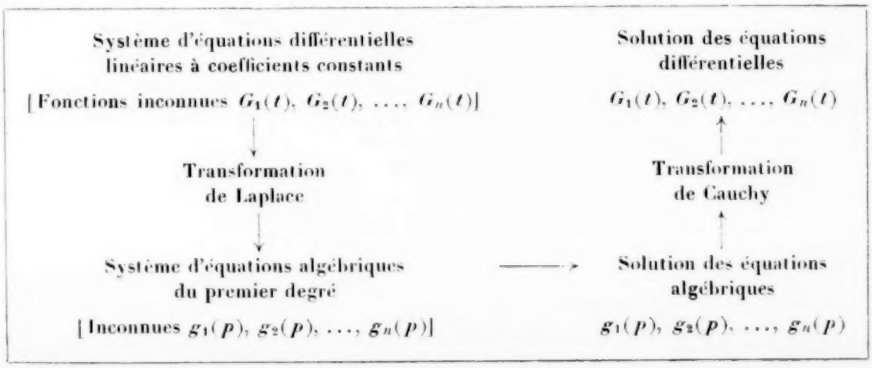
Le tableau ci-dessous résume la suite des opérations.

2422. Intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n a coefficients constants. — Pour concrétiser, étudions d'abord l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(1)\qquad a_n\frac{d^n G}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}G}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dG}{dt} + a_0 G = F(t),$$

où G est une fonction inconnue de t et où les valeurs initiales ($t = 0$) de

$$G,\quad \frac{dG}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1}}{dt^n}\quad \text{sont}\quad G_0,\quad G_0',\quad \ldots,\quad G_0^{(n-1)}.$$



Suivant le processus indiqué cherchons par la méthode de Laplace la transformée de cette équation. Soient $g(p)$, $f(p)$ les transformées de $G(t)$, $F(t)$.

Les transformées de

$$\frac{d^n G(t)}{dt^n}, \quad \frac{d^{n-1} G(t)}{dt^{n-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{d\,G(t)}{dt}, \quad G(t)$$

sont (Tableaux I-7 et 8) :

$$\begin{array}{r}
-G_0^{(n-1)} - p\,G_0^{(n-2)} - \ldots - p^{n-1} G_0 + p^n g(p) \\
-G_0^{(n-2)} - \ldots - p^{n-2} G_0 + p^{n-1} g(p) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-G_0 + p g(p) \\
g(p)
\end{array}$$

et l'équation transformée est par conséquent

$$\begin{array}{l}
a_n[-G_0^{(n-1)} - p\,G_0^{(n-2)} - \ldots - p^{n-1} G_0 + p^n g(p)] \\
\quad + a_{n-1}[-G_0^{(n-2)} - \ldots - p^{n-2} G_0 + p^{n-1} g(p)] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + a_0 g(p) = f(p)
\end{array}$$

ou en groupant, dans le premier membre, d'une part tous les termes qui contiennent $g(p)$, et d'autre part, tous ceux qui en sont indépendants,

$$(2) \qquad -\psi(p) + \varphi(p)\,g(p) = f(p).$$

$\varphi(p)$ est le polynome de degré n en t :

$$\varphi(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Le produit $\varphi(p)\,g(p)$ n'est autre que le premier membre de l'équation à intégrer dans lequel $G(t)$ a été remplacé par $g(p)$ et $\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n}{dt^n}$, par $p, p^2, \ldots, p^n$.

$\psi(p)$ est le polynome de degré $n-1$ en p qu'on peut former à l'aide du tableau [1]

$$\left|\begin{array}{ccccc|c}
p^{n-1} & p^{n-2} & p^{n-3} & \ldots & 1 & \\
\hline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & G_0 \\
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_2 & G_0' \\
 & & a_n & \ldots & a_3 & G_0'' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & a_n & G_0^{(n-1)}
\end{array}\right.$$

en multipliant chaque coefficient a par le $G_0^{(i)}$ placé à sa droite et le p^{n-k} placé au-dessus et en ajoutant.

Suivant la méthode indiquée, résolvons maintenant l'équation (2), où $g(p)$ est l'inconnue; il vient

$$g(p) = \frac{f(p)}{\varphi(p)} + \frac{\psi(p)}{\varphi(p)} = u + v,$$

avec

$$u(p) = \frac{f(p)}{\varphi(p)}, \qquad v(p) = \frac{\psi(p)}{\varphi(p)}.$$

[1] Indiqué par N. W. Mac Lachlam, *Complex variable and operational calculus*, Cambridge, 1939.

Opérant $g(p)$ par la transformation de Cauchy, il vient enfin

$$G(t) \sqsupset g(p)$$

ou

$$G(t) = U(t) + V(t), \quad \text{avec } U(t) \sqsupset u(p), \quad V(t) \sqsupset v(p).$$

Si, au temps $t = 0$, on avait

$$G_0 = G_0' = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0,$$

on aurait obtenu simplement

$$g(p) = \frac{f(p)}{\varphi(p)} = u(p),$$

$$G(t) = U(t).$$

2423. Intégration d'un système d'équations différentielles linéaires a coefficients constants. — Ainsi que nous l'avons vu dans la première conférence, l'étude physique du problème conduit le plus souvent non à une seule équation différentielle, mais à un système d'équations, contenant plusieurs fonctions inconnues de t.

On sait qu'un tel système peut être ramené à une seule équation, de sorte que, théoriquement, l'étude qui vient d'être faite résout complètement le problème.

Mais il sera plus simple en général de traiter directement la question. Soit $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., $G_q(t)$ les fonctions cherchées. Appliquant aux q équations différentielles du système la transformation de Laplace, nous obtenons q équations du premier degré en $g_1(p)$, $g_2(p)$, ..., $g_q(p)$. La solution de ces équations donne $g_1(p)$, $g_2(p)$, ..., $g_q(p)$, qu'il suffit de transformer par la méthode de Cauchy pour obtenir les solutions $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., $G_q(t)$ cherchées.

243. Étude des solutions.

2431. Méthode classique et méthode nouvelle. — Reprenons par exemple le cas d'une seule équation différentielle d'une seule fonction inconnue $G(t)$. La méthode classique nous donnait le résultat sous la forme d'une somme de deux termes

$$(1) \qquad G(t) = G_r(t) + G_\tau(t),$$

le premier représentant, comme nous l'avons vu, le terme de régime, le second le terme transitoire. Soit G_{τ_0} le terme transitoire obtenu quand on fait $G_0 = G_0' = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0$, nous écrivons

$$G_\tau = G_{\tau_0} + G_{\tau_1}, \qquad G = G_r + G_{\tau_0} + G_{\tau_1}.$$

La méthode nouvelle nous donne également G sous forme d'une somme de deux termes

$$G = U + V,$$

mais ce ne sont pas les mêmes que précédemment. Le second, nous l'avons déjà remarqué, s'annule quand $G_0 = G'_0 = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0$. U est donc la solution de l'équation dans ces conditions : elle comprend le terme de régime G_r et le terme transitoire G_{τ_0} correspondant aux conditions initiales qui viennent d'être indiquées. V est le complément G_{τ_1} du terme transitoire, qui apparaît quand les valeurs des G_0, G'_0, ..., $G_0^{(n-1)}$ ne sont pas toutes nulles. On a

$$(2) \qquad U = G_r(t) + G_{\tau_0}(t), \qquad V = G_{\tau_1}(t).$$

2432. Étude du terme transitoire. — Des deux parties G_{τ_0} et G_{τ_1} du terme transitoire G_τ, le second G_{τ_1} est une fonction linéaire de

$$G_0,\ G'_0,\ \ldots,\ G_0^{(n-1)},$$

le premier G_{τ_0} ne se distingue du second qu'en ce que

$$G_0,\ G'_0,\ \ldots,\ G_0^{(n-1)}$$

sont remplacés par

$$-G_{r_0},\ -G'_{r_0},\ \ldots,\ -G_{r_0}^{(n-1)},$$

où

$$G_{r_0},\ G'_{r_0},\ \ldots,\ G_{r_0}^{(n-1)}$$

sont les valeurs initiales du terme de régime $G_r(t)$ et de ses dérivées.

Cette remarque permet de simplifier le calcul du terme transitoire en le ramenant à celui de l'une de ses parties seulement, G_{τ_0} ou G_{τ_1}.

2433. Étude du terme de régime. — Reprenons les deux cas étudiés au paragraphe 1133 à propos de la méthode classique de solution des équations.

Second membre constant $[F(t) = C]$. — On trouve, dans le Tableau II (n° 1),

$$f(p) = \frac{C}{p},$$

et par conséquent,

$$u = \frac{C}{p\varphi(p)}.$$

(p) étant un polynome en p, u tend vers zéro quand $\mathcal{R}(p)$ augmente indéfiniment. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} u(p)\, e^{pt}\, dp$$

est donc égale à la somme des résidus de $u(p)\, e^{pt}$. Ceux-ci sont de deux sortes :

ceux qui correspondent aux racines de $\varphi(p)$, qui sont de la forme $A\, e^{\alpha t}$ et fournissent les termes transitoires pour $G_0 = G'_0 = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0$;

celui qui correspond au résidu au point $p = 0$, qui fournit le terme de régime. D'après la règle 2133-2 ce résidu a pour valeur

$$G_r = \frac{C}{\varphi(0)}(e^{pt})_{t=0} = \frac{C}{\varphi(0)} = \frac{C}{a_0}.$$

Le terme de régime cherché s'obtient donc en remplaçant dans l'équation différentielle donnée 2422-1 G par G_r et faisant $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} = \ldots = \frac{d^n}{dt^n} = 0$. C'est la règle qui avait été obtenue par la méthode classique.

Second membre sinusoïdal $[F(t) = F\cos(\omega t - \varphi)]$. — Écrivons

$$F(t) = F\cos(\omega t - \varphi) = \frac{F}{2}[e^{j(\omega t-\varphi)} + e^{-j(\omega t-\varphi)}].$$

Le terme de régime cherché est la somme de ceux obtenus avec deux seconds membres égaux respectivement à $\frac{F}{2}e^{j(\omega t-\varphi)}$ et $\frac{F}{2}e^{-j(\omega t-\varphi)}$. Étudions le premier. La fonction en p correspondant à

$$\frac{F}{2}e^{j(\omega t-\varphi)} = \frac{F}{2}e^{-j\varphi}e^{j\omega t} \quad \text{est (tableau II-8)},$$

$$\frac{F}{2}e^{-j\varphi}\frac{1}{(p-j\omega)},$$

et par conséquent,

$$u = \frac{F}{2}e^{-j\varphi}\frac{1}{(p-j\omega)\varphi(p)}.$$

$\varphi(p)$ étant un polynome en p, u tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} u(p)\, e^{pt}\, dp$$

est donc égale à la somme des résidus de $u(p)\, e^{pt}$. Ceux-ci, comme au paragraphe précédent, sont de deux sortes :

ceux qui correspondent aux racines de $\varphi(p)$, sont des exponentielles de la forme $A\, e^{\alpha t}$ et fournissent le terme transitoire pour

$$G_0 = G'_0 = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0,$$

et celui qui correspond au résidu au point $p = j\omega$, qui constitue le terme de régime, soit d'après la régle 2133-2,

$$\frac{F}{2}\frac{e^{j(\omega t-\varphi)}}{\varphi(j\omega)}.$$

La deuxième partie de la solution est l'imaginaire conjuguée, et le terme de régime cherché est la somme des deux, soit

$$G_r = \frac{F}{2}\left(\frac{e^{j(\omega t-\varphi)}}{\varphi(j\omega)} + \frac{e^{-j(\omega t-\varphi)}}{\varphi(-j\omega)}\right)$$
$$= \mathcal{R}\left(F\frac{e^{j(\omega t-\varphi)}}{\varphi(j\omega)}\right) = \mathcal{R}\left(|F|\frac{e^{j\omega t}}{\varphi(j\omega)}\right),$$

en posant

$$|F| = F e^{-j\varphi}.$$

Nous retrouvons encore, simplement, le résultat de la méthode classique connue sous le nom de méthode des imaginaires (§ 1133).

2434. Cas où la solution est connue quand le second membre est l'unité. — Soit

$$G_0 = G'_0 = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0$$

et supposons connue la solution $A(t)$ de l'équation 2422-1 quand le second membre est l'unité.

Le Tableau II, n° 1 donne

$$1 \sqsupset \frac{1}{p},$$

et l'on a par conséquent,

$$a(p) = \frac{1}{p\varphi(p)},$$

d'où

$$\frac{1}{\varphi(p)} = pa(p).$$

Étant données les conditions initiales, et tenant compte de cette expression, nous avons

$$(1) \qquad g(p) = u(p) = \frac{f(p)}{\varphi(p)} = pf(p)a(p).$$

Appliquons la règle du produit de composition (Tableau I, n° 21) à $f(p)\,a(p)$, il vient :

$$a(p)f(p) \sqsubset \int_0^t A(t-\tau)F(\tau)\,d\tau = \int_0^t A(t)F(t-\tau)\,d\tau,$$

puis, par la règle de dérivation (Tableau I, n° 7),

$$pa(p)f(p) \sqsubset \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)F(\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{d}{dt}\int_0^t A(t)F(t-\tau)\,d\tau$$

ou, d'après (1),

$$G(t) = U(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)F(\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{d}{dt}\int_0^t A(t)F(t-\tau)\,d\tau.$$

2435. Cas où la solution est connue quand le second membre est la fonction impulsive unité. — Soit $G_0 = G'_0 = \ldots = G_0^{(n-1)} = 0$ et supposons connue la solution $B(t)$ de l'équation 2422-1 quand le second membre est la fonction impulsive unité.

Puisque la fonction impulsive unité se change en l'unité par la transformation de Laplace (Tableau II, n° 5), on a

$$b(p) = \frac{1}{\varphi(p)}.$$

Étant données les conditions initiales et la valeur ci-dessus de $\varphi(p)$ il vient

$$g(p) = u(p) = \frac{f(p)}{\varphi(p)} = f(p)b(p),$$

d'où, par la règle du produit de composition (Tableau I, n° 21),

$$G(t) = U(t) = \int_0^t F(t-\tau)B(\tau)\,d\tau = \int_0^t F(t)B(t-\tau)\,d\tau.$$

244. Exemple : Solution et applications techniques de l'équation différentielle du second ordre.

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dG(t)}{dt} + \varpi^2 G(t) = F(t)$$

avec les conditions initiales

$$G = G_0, \qquad \frac{dG}{dt} = G'_0, \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

24410. *Intégration de l'équation.* — Suivant la méthode exposée au paragraphe 2422 transformons l'équation par la méthode de Laplace (Tableau I, nos 7 et 8)

$$\frac{d^2G}{dt^2} \sqsupset -pG_0 - G'_0 + p^2 g(p),$$
$$\frac{dG}{dt} \sqsupset -G_0 + p\,g(p)$$

et l'équation s'écrit, après transformation,

$$-(pG_0 + G'_0 + 2\alpha G_0) + (p^2 + 2\alpha p + \varpi^2)g(p) = f(p),$$

d'où

$$g(p) = \frac{f(p)}{p^2 + 2\alpha p + \varpi^2} + \frac{pG_0 + G'_0 + 2\alpha G_0}{p^2 + 2\alpha p + \varpi^2} = u + v.$$

24411. *Terme transitoire.* — Étudions d'abord le terme v (§ 2422) dont le correspondant $V(t)$ par la transformation de Cauchy nous permettra (*voir* § 2432) de déterminer le terme transitoire

$$v = \frac{pG_0 + G'_0 + 2\alpha G_0}{p^2 + 2\alpha p + \varpi^2}.$$

Il est de la forme des seconds membres des expressions 17 et 25 du Tableau II et nous pouvons par conséquent écrire :

$$(1)\quad V(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\mu t + \varphi) = e^{-\alpha t}\left(G_0 \frac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\theta} + \frac{G'_0}{\mu}\sin\mu t\right),$$

$$(2)\quad V(t) = B e^{-\alpha t} \sinh(\nu t + \psi) = e^{-\alpha t}\left(G_0 \frac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta} + \frac{G'_0}{\delta}\sinh\nu t\right)$$

avec

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\mu G_0}{\alpha G_0 + G'_0}, \qquad \mu = \sqrt{\varpi^2 - \alpha^2}, \\ A^2 = \dfrac{1}{\mu^2}(\alpha G_0 + G'_0)^2 + G_0^2, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{tgh}\psi = \dfrac{\nu G_0}{\alpha G_0 + G'_0}, \qquad \nu = \sqrt{\alpha^2 - \varpi^2}, \\ B^2 = \dfrac{1}{\nu^2}(\alpha G_0 + G'_0)^2 - G_0^2, \end{cases}$$

$$\nu = j\mu, \qquad \operatorname{tgh}\psi = j\operatorname{tg}\varphi, \qquad jB = A, \qquad j = \sqrt{-1},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\mu}{\alpha}, \qquad \operatorname{tgh}\delta = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Les expressions (1) et (2) montrent que nous avons trois cas à considérer :

1° μ réel, ou $\varpi^2 > \alpha^2$. La forme la plus commode est la forme (1). $V(t)$ est une oscillation sinusoïdale amortie, de fréquence $\frac{\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\varpi^2 - \alpha^2}$, d'amortissement α.

2° ν réel ou $\varpi^2 < \alpha^2$. La forme la plus commode est la forme (2); il y a apériodicité.

3° $\nu = \mu = 0$, $\varpi = \alpha$: c'est l'apériodicité critique.

Dans les trois cas $V(t)$ s'annule au bout d'un temps théoriquement infini si, comme il arrive dans tous les cas que nous avons étudiés dans la première partie, α est positif.

On passe du terme $V(t)$ au terme transitoire complet en remplaçant dans les expressions (1), (2), (3), (4), G_0 et G'_0 respectivement par $G_0 - G_{r_0}$ et $G'_0 - G'_{r_0}$, G_{r_0} et G'_{r_0} étant les valeurs initiales du terme de régime et de sa dérivée (§ 2432).

24412. *Terme de régime.* — C'est (§ 2433) la somme des résidus de $u(p)\,e^{pt}$ qui correspond aux singularités de $f(p)$.

1. *$F(t)$ est constant.* Suivant la règle du paragraphe 2433, il vient immédiatement

$$G_r(t) = \frac{C}{\varpi^2}.$$

2. *$F(t)$ est la fonction impulsive telle que*

$$\int_0^\tau F(t)\,dt = \int_0^t F(t)\,dt = G.$$

G étant constant, τ étant la durée de l'impulsion, supposée infiniment petite. D'après le Tableau II, n° 5 la fonction $g(p)$ est la constante G. Elle n'a pas de singularité; il n'y a pas de terme de régime.

Calculons le terme $U_\tau(t)$, partie transitoire de $U(t)$. C'est (§ 2432) la transformée de Cauchy de

$$u(p) = \frac{G}{p^2 + 2\alpha p + \varpi^2} = \frac{G}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

ou (Tableau II, n° 31)

$$U_\tau(t) = G\frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = G e^{-\alpha t}\frac{e^{j\mu} - e^{-j\mu}}{2j\mu} = \frac{G}{\mu} e^{-\alpha t}\sin\mu t.$$

Dérivant par rapport à t, il vient

$$U'_\tau(t) = G e^{-\alpha t}\frac{\sin(pt - \theta)}{\sin\theta} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Pour $t = 0$, on a

$$U_{\tau_0} = 0, \qquad U'_{\tau_0} = -G.$$

Puisqu'on doit avoir

$$U_0 = U_{r_0} + U_{\tau_0} = 0, \qquad U'_0 = U'_{r_0} + U'_{\tau_0} = 0,$$

il vient ainsi

$$U_{r_0} = 0, \qquad U'_{r_0} = G.$$

3. *$F(t)$ est sinusoïdal.* Soit

$$F(t) = \sin\omega t.$$

Appliquant la règle du paragraphe 2433 on trouve immédiatement pour le terme de régime

$$G_r(t) = \mathcal{R}\left(\frac{-jFe^{j\omega t}}{\varpi^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}\right) = -\frac{F\cos(\omega t - \chi)}{\sqrt{(\varpi^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

avec

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\omega^2 - \varpi^2}{2\alpha\omega}.$$

2442. Applications. — En combinant deux à deux les divers types de conditions initiales et de seconds membres, nous obtenons immédiatement la solution des problèmes énumérés dans la Section 114.

24421. *Mobiles avec raideur, inertie, se déplaçant en milieux visqueux.* — L'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + sx = P(t).$$

Nous supposons que le mobile part du repos ($x_0 = 0$, $x'_0 = 0$).

a. Force appliquée F constante. — On obtient

$$y = \frac{F}{s}\left(1 - e^{-\alpha t}\frac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\mu}\right) = \frac{F}{s}\left(1 - e^{-\alpha t}\frac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta}\right).$$

On reconnaît le déplacement constant $\frac{F}{s}$, atteint au bout d'un temps théoriquement infini, après que le terme transitoire est devenu insensible.

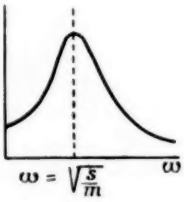


Fig. 24421-1.

b. Force appliquée sinusoïdale $F \sin \omega t$. — Les vibrations forcées, qui subsistent seules au bout d'un certain temps, sont données par l'expression

$$\frac{-F\cos(\omega t - \chi)}{\sqrt{\left(\frac{s}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{r^2\omega^2}{m^2}}}.$$

La courbe qui représente l'amplitude de l'oscillation a la forme d'une courbe en cloche. Le maximum est voisin de $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$; c'est le phénomène de résonance.

c. Analyse d'un son complexe. — La force appliquée est de la forme

$$C_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots.$$

Négligeons le terme transitoire. La vibration est de la forme

$$x = x_1\cos(\omega_1 t - \psi_1) + x_2\cos(\omega_2 t - \psi_2) + \ldots.$$

Faisons varier $\frac{s}{m}$. Quand il prend successivement les valeurs $\omega_1, \omega_2, \ldots$, des résonances se produisent, qui mettent en évidence les fréquences composantes.

24422. *Systèmes tournants avec inertie et raideur, en milieux visqueux.* — L'équation du mouvement est

$$I\frac{d^2\gamma}{dt^2} + r\frac{d\gamma}{dt} + s\gamma = C(t).$$

Oscillations de torsion. — Un fil élastique AB, fixé en A, est tendu par un poids cylindrique attaché en B. Le système étant en équilibre, on tourne le cylindre d'un angle γ_0 autour de son axe et on l'abandonne à lui-même.

Fig. 24422-1

Les conditions initiales sont $\gamma = \gamma_0$, $\gamma'_0 = 0$. Il n'y a pas de couple appliqué. La solution ne comprend que le terme transitoire

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{r}{2I}t}\frac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\theta} = \gamma_0 e^{-\frac{r}{2I}t}\frac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta}$$

oscillant ou non suivant que $\frac{s}{I}$ est plus grand ou plus petit que $\frac{r^2}{4I^2}$.

Galvanomètre Deprez-d'Arsonval. — i étant l'intensité du courant, supposée constante, on a (pour les notations, *voir* § 11426)

$$r = K + \frac{HN^2S^2}{\rho}, \qquad nSHi = C(t).$$

Le mouvement est donné par l'équation

$$\gamma = \frac{nSHi}{s}\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\theta}\right]$$
$$= \frac{nSHi}{s}\left(1 - e^{-\alpha t}\frac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta}\right).$$

Il y a intérêt à rendre α aussi grand que possible pour diminuer la durée du terme transitoire.

Galvanomètre balistique. — On applique une impulsion de courant, telle que

$$\int_0^\tau i\,dt = Q.$$

Q étant la quantité d'électricité qui passe. Le couple appliqué est impulsif et tel que

$$\int C(t)\,dt = \frac{NSH}{I}\int i\,dt = \frac{NSH}{I}Q.$$

L'équation du mouvement est

$$\gamma(t) = \frac{NSHQ}{I\mu}e^{-\alpha t}\sin\mu t, \qquad \alpha = \frac{r}{2I}.$$

Elle est toujours oscillante et α est toujours petit puisque I est très grand. L'élongation du premier

maximum est $\frac{NSHQ}{I\mu} = \frac{NSHQ}{\sqrt{Is}}$ et permet de mesurer la quantité d'électricité Q.

Galvanomètre à vibration. — L'appareil est traversé par un courant sinusoïdal dont il s'agit de mesurer l'amplitude i. On part du repos. L'état de régime est donné par l'équation

$$\gamma = \frac{NSHi}{I} \frac{1}{\sqrt{(\varpi^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}.$$

On règle ϖ de manière à rendre γ maximum ($\varpi^2 = \omega^2$). L'étude du maximum montre qu'il est le plus grand possible quand

$$\frac{HnS}{\rho} = \sqrt{kI};$$

l'amortissement mécanique est alors égal à l'amortissement électrique.

Oscillographe de Blondel. — La force appliquée est alors un courant de forme quelconque, pouvant être représenté par une série de Fourier

$$i(t) = \sum_j i_j \sin(\omega_j t - \xi_j).$$

On rend l'amortissement α le plus grand possible en plongeant l'équipage mobile dans l'huile. Le terme transitoire est alors négligeable.

Restent les oscillations forcées correspondant aux divers termes du second membre de $i(t)$. Une étude minutieuse du fonctionnement a permis à Blondel d'obtenir la fidélité nécessaire, en même temps qu'une suffisante sensibilité, et de doter la technique des oscillations d'un moyen d'investigation qui a été le principal instrument de son progrès pendant une vingtaine d'années jusqu'à la mise au point récente des oscillographes à rayons cathodiques.

24423. *Circuit électrique avec inductance L, capacité C et résistance R.* — L'équation différentielle de la différence de potentiel U entre les bornes de condensateur est (*voir* § 11427)

$$(1) \qquad LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = E(t),$$

$E(t)$ étant la force électromotrice appliquée, et l'intensité du courant est

$$i = \frac{1}{C}\frac{dU}{dt}.$$

De cette équation dépendent des problèmes techniques nombreux et variés.

Pas de force électromotrice. Décharge du condensateur. — Supposons

$$E(t) = 0, \qquad U_0' = 0.$$

Le condensateur chargé au début au potentiel U_0 se décharge suivant la loi

$$(2) \quad U = U_0 e^{-\alpha t}\frac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\theta} = U_0 e^{-\alpha t}\frac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta},$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \qquad (\mu = j\nu),$$

$$i = -\frac{U_0}{L\mu}e^{-\alpha t}\sin\mu t = -\frac{U_0}{L\nu}e^{-\alpha t}\sinh\nu t.$$

La décharge est oscillante si μ est réel, apériodique si ν est réel.

Force électromotrice constante R. Charge du condensateur. — Supposons, pour les conditions initiales $i_0 = 0$, $U_0 = 0$,

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{charge oscillante } (\mu \text{ réel}). \\ U(t) = Ee^{-\alpha t}\left(1 - \dfrac{\sin(\mu t + \theta)}{\sin\theta}\right). \\ \qquad i = \dfrac{E}{L\mu}e^{-\alpha t}\sin\mu t. \\ \text{charge apériodique } (\nu \text{ réel}). \\ U(t) = Ee^{-\alpha t}\left(1 - \dfrac{\sinh(\nu t + \delta)}{\sinh\delta}\right). \\ \qquad i = \dfrac{E}{L\nu}e^{-\alpha t}\sinh\nu t. \end{array}\right.$$

Force électromotrice sinusoïdale. — $E(t) = E\sin\omega t$. Écrivons seulement le terme de régime qui a une très grande importance dans la théorie du courant alternatif :

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} U_r = -\dfrac{E\cos(\omega t - \chi)}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}, \\ i_r = \dfrac{E\sin(\omega t - \chi)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}, \qquad \operatorname{tg}\chi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}; \end{array}\right.$$

$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ est l'impédance du circuit.

Force électromotrice impulsive. — C'est par exemple le cas d'un parasite attaquant un poste récepteur de T. S. F. Supposons $U_0 = U_0' = 0$. On a

$$(5) \qquad U(t) = \frac{K}{LC\mu}\frac{\sin\mu t}{\mu}e^{-\alpha t}.$$

K est l'intensité de l'impulsion électromotrice

$$K = \int_0^\infty E(t)\,dt.$$

Un signal de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ donne, pour le cas du réglage du circuit à la résonance, l'expression suivante, déduite de (4)

$$(6) \qquad U(t) = \frac{E\cos\omega t}{C\omega R}.$$

La comparaison de (5) et (6) permet de calculer la protection fournie contre les parasites par le réglage à la résonance. On constate que cette protection est d'autant meilleure que le parasite est plus court.

CHAPITRE CINQUIÈME.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

251. L'équation aux dérivées partielles, les conditions initiales et les conditions aux limites.

Pour étudier l'application de la méthode aux équations aux dérivées partielles nous prendrons comme exemple l'équation dont nous avons constaté l'importance considérable pour la physique mathématique et la technique industrielle :

$$(1) \qquad \Delta U + A_2(x, y, z)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + A_1(x, y, z)\frac{\partial U}{\partial t} + A_0(x, y, z) = B(x, y, z, t),$$

Δ étant l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dans cette équation t est le temps, x, y, z sont les coordonnées d'espace.

Le problème est déterminé si les conditions initiales et les conditions aux limites sont données.

Les conditions initiales sont les valeurs $U_0(x, y, z)$ de $U(x, y, z, t)$ et $U_0'(x, y, z)$ de $\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t}$ pour $t = 0$.

Quant aux conditions aux limites, nous les supposons données sous la forme d'une combinaison linéaire des valeurs de U et de la dérivée normale $\frac{\partial U}{\partial n}$ sur la surface limite du domaine de variation de x, y, z, soit

$$(2) \qquad G(x, y, z)U + H(x, y, z)\frac{\partial U}{\partial n} = K(x, y, z, t),$$

G, H, K étant des fonctions continues.

252. Application des transformations de Laplace et de Cauchy.

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation (251-1), considérée comme équation en t. Soient $u(x, y, z, p)$ et $k(x, y, z, p)$ les transformées de $U(x, y, z, t)$ et $K(x, y, z, t)$. Supposons que

$$\Delta u \sqsubset \Delta U.$$

L'équation 251-1 s'écrit (Tableau I, nos 7 et 8)

$$(1) \qquad \Delta u + [A_2(x, y, z)p^2 + A_1(x, y, z)p + A_0(x, y, z)]u = k(x, y, z, p) + [A_2(x, y, z)p + A_1(x, y, z)]U_0(x, y, z) + A_2(x, y, z)U_0'(x, y, z).$$

Notre équation transformée tient compte des conditions initiales. Quelles sont les conditions aux limites ? Supposons qu'à la surface limite du domaine de variation de x, y, z,

$$u(x, y, z, p) \sqsubset U(x, y, z, t),$$
$$\frac{\partial u(x, y, z, p)}{\partial n} \sqsubset \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t},$$
$$k(x, y, z, p) \sqsubset K(x, y, z, t).$$

La condition aux limites 251-2 peut alors être transformée par la méthode de Laplace et devient

$$(2) \qquad G(x, y, z)u(x, y, z, p) + H(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z, p)}{\partial n} = k(x, y, z, p)$$

sur la surface limite du domaine de variation de x, y, z.

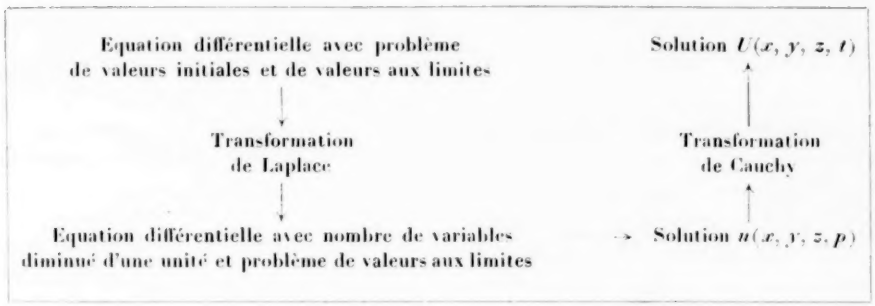
Nous avons ainsi transformé l'équation primitive 251-1, qui était une équation aux dérivées partielles à quatre variables, en une équation à trois variables seulement. Nous avons diminué d'une unité le nombre des variables. Là est le bénéfice de l'opération, et il arrive souvent qu'il est considérable.

Supposons maintenant faite l'intégration de l'équation (1). Nous connaissons $u(x, y, z, p)$.

Appliquant à cette fonction la transformation de Cauchy, nous obtenons $U(x, y, z, t)$, qui est l'intégrale cherchée.

L'ensemble du procédé peut être résumé dans le tableau ci-après.

Quelques exemples préciseront le mode d'application de la méthode.



253. **Application de l'équation de la diffusion.**

Prenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

et supposons les conditions initiales et aux limites suivantes :

conditions initiales

$$U_{t=0}(x, t) = 0.$$

conditions aux limites :

$$a. \qquad U_{x=0}(x, t) = E_0,$$
$$b. \qquad U_{x=\infty}(x, t) = 0.$$

Les applications seront :

a. Le câble télégraphique sous-marin indéfini si $A = \sqrt{CR}$ (C capacité et R résistance par unité de longueur). U est le potentiel.

b. La diffusion de la chaleur dans une barre indéfinie calorifugée ou un mur épais, si $A = \frac{\delta C}{\gamma}$ (δ densité, C chaleur spécifique, γ conductibilité calorifique). U est la température.

c. La diffusion de l'humidité dans un mur épais. U est la concentration de l'humidité et A le coefficient de diffusion.

Par la transformation de Laplace l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - Apu = 0 \qquad [\text{avec } u(p) \sqsubset U(t)]$$

et les conditions aux limites s'écrivent :

$$(3_1) \qquad u_{x=0}(x, p) = \frac{E_0}{p},$$
$$(3_2) \qquad u_{x=\infty}(x, p) = 0.$$

L'équation (2) est une équation bien connue. A titre d'exercice, intégrons-la par la méthode du paragraphe 2422. Transformons-la par la méthode de Laplace en appelant $U(q, p)$ la fonction transformée, q étant la nouvelle variable. La transformée est, en appelant v la transformée de u,

$$(4) \qquad q^2 v - u'_0 - qu_0 - Apv = 0,$$

u'_0 et u_0 étant les valeurs de u et $\frac{du}{dx}$ pour $x = 0$. On a vu que $u_0 = \frac{E_0}{p}$. Quant à u'_0, il sera calculé dans un instant.

On déduit de (4)

$$v = \frac{u'_0 + qu_0}{q^2 - Ap} = \frac{u'_0 + qu_0}{(q - \sqrt{Ap})(q + \sqrt{Ap})},$$

$u(x, p)$ nous est maintenant donné par la transformation de Cauchy appliquée à v. $v(q, p)\, e^{qx}$ ayant les deux points singuliers $q = \sqrt{Ap}$, $q = -\sqrt{Ap}$, $u(x, p)$ est la somme des résidus correspondants, soit

$$u(x, p) = \frac{(u'_0 + \sqrt{Ap}\, u_0)\, e^{\sqrt{Ap}\, x}}{2\sqrt{Ap}} + \frac{(u'_0 - \sqrt{Ap}\, u_0)\, e^{-\sqrt{Ap}\, x}}{-2\sqrt{Ap}},$$

résultat que nous aurions d'ailleurs immédiatement trouvé dans le formulaire.

Écrivons [condition aux limites (3_2)] que

$$u_{x=\infty}(x, p) = 0;$$

il vient

$$u'_0 + \sqrt{Ap}\, u_0 = 0,$$

et $u(x, p)$ se réduit à

$$u'_0 = u_0 e^{-\sqrt{Ap}\, x} = \frac{E_0}{p} e^{-\sqrt{Ap}\, x}.$$

Appliquant la transformation de Cauchy à cette fonction de p en recourant au formulaire (Tableau II, n° 45) pour éviter le calcul, il vient enfin

$$U(x, t) = E_0\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{A}{t}}\right)$$

erf y étant la fonction

$$\operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(y - \frac{y^3}{1!3} + \frac{y^5}{2!5} - \frac{y^7}{3!7} + \dots \right).$$

254. Exemple d'application de l'équation des ondes.

Je vais enfin indiquer, d'après Mac Lachlan et Mac Kay [1], le principe de l'étude du pavillon exponentiel. C'est une question intéressante, où les vibrations forcées ont autant d'importance que les phénomènes transitoires.

Considérant un pavillon exponentiel (*fig.* 254-1),

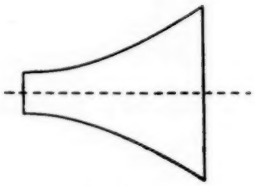


Fig. 254-1.

nous supposons que la section par un plan normal à l'axe est de la forme

$$(1) \qquad A = A_0 e^{\beta x}.$$

Lagrange a démontré que, dans des conditions que nous supposons remplies, la vitesse des molécules d'air dépend d'un potentiel Φ. Soit Ξ le déplacement, V la vitesse, on a

$$V = \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

c étant la vitesse de propagation du son dans l'air, l'équation des ondes, compte tenu de (1), conduit pour le potentiel Φ à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Nous cherchons la pression s au point x et au temps t, cette pression étant donnée par

$$(3) \qquad s = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ρ_0 étant la densité de l'air au repos.

Conditions aux limites. — *a.* Soit $\Xi = \Xi_0 \cos \omega t$ le déplacement de l'air à l'entrée du pavillon ($x = 0$) supposé donné. La vitesse et la dérivée du potentiel par rapport à x sont données par

$$\left(\frac{d\Xi}{dt}\right)_{x=0} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = -\omega \Xi_0 \sin \omega t.$$

b. Nous supposons le pavillon assez long pour qu'à l'extrémité l'amplitude soit négligeable

$$\Phi_{x=\infty} = 0.$$

Conditions initiales. — Nous supposons partir du repos.

Au temps $t = 0$:

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Étant données les conditions initiales, l'application de la transformation de Laplace à l'équation (2) donne

$$(4) \qquad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \beta \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{c^2} p^2 \varphi = 0 \qquad (\varphi(x, p) \sqsubset \Phi(x, t))$$

φ étant une fonction de x et p. C'est une équation linéaire à coefficients constants en x.

Les conditions aux limites et l'équation (3) deviennent

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varphi'_0 &= \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \omega^2 \Xi_0 \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \\ \varphi_{x=\infty} &= 0, \\ s(x, p) &= \rho_0 p \varphi. \end{aligned}$$

L'équation (4) en x étant linéaire à coefficients constants peut elle aussi être intégrée par la méthode du paragraphe 2422. Transformons-la par la règle de Laplace. Il vient, en appelant q la nouvelle variable et $f(q, p)$ la fonction transformée

$$\left(q^2 + \beta q - \frac{1}{c^2} p^2\right) f = \varphi'_0 + \beta \varphi_0 + q \varphi_0$$

φ_0 étant la valeur de $\varphi(x, p)$ pour $x = 0$

$$f = \frac{\varphi'_0 + \beta \varphi_0 + q \varphi_0}{q^2 + \beta p - \frac{p^2}{c^2}}.$$

Appliquons la transformation de Cauchy; la transformée de f est la somme des résidus de $f e^{qx}$ pour les deux pôles q_1 et q_2 racines du dénominateur

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \frac{4p^2}{c^2}}}{2}$$

soit, en appliquant la règle 2133-2,

$$\varphi(x, p) = \frac{\varphi'_0 + \beta \varphi_0 + q_1 \varphi_0}{q_1 - q_2} e^{q_1 x} + \frac{\varphi'_0 + \beta \varphi_0 + q_2 \varphi_0}{q_2 - q_1} e^{q_2 x},$$

[1] N. W. Mc Lachlan et A. T. Mc Kay, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 32, 1936, p. 265.

expression que nous aurions pu également calculer au moyen du Tableau II.

La condition aux limites $\varphi_{x=\infty} = 0$ exige que le coefficient de $e^{q_2 x}$ soit nul d'où

$$\varphi'_0 + (\beta + q_1)\varphi_0 = 0$$

ou, puisque

$$\beta = -(q_1 + q_2),$$

$$\varphi'_0 - q_2\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_0 = \frac{\varphi'_0}{q_2}.$$

Il vient ensuite

$$\varphi(x, p) = \frac{\varphi'_0 + (\beta + q_2)\varphi_0}{q_2 - q_1} e^{q_2 x} = \frac{\varphi'_0 - q_1\varphi_0}{q_2 - q_1} e^{q_2 x}$$

$$= \varphi'_0 \frac{\dfrac{q_2 - q_1}{q_2}}{q_2 - q_1} e^{q_2 x} = \frac{\varphi'_0}{q_2} e^{q_2 x}$$

et en remplaçant φ'_0 par sa valeur

$$\varphi(x, p) = \omega^2 \Xi_0 \frac{1}{p^2 + \omega^2} \frac{2}{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \dfrac{4p^2}{c_2}}} e^{q_2 x}$$

ou, en multipliant haut et bas par $\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\dfrac{p^2}{c^2}}$

$$\varphi(x, p) = \frac{\omega^2}{2} \Xi_0 \frac{c^2}{p^2(p^2 + \omega^2)}$$

$$\times \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{4p^2}{c^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}x\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \Xi_0 c^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x}$$

$$\times \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}}}{p^2(p^2 + \omega^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \Xi_0 c^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x}\left(\beta + 2\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}}}{p^2(p^2 + \omega^2)},$$

d'où suivant (5)

$$(6) \qquad s = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \Xi_0 c^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x}\left(\beta + 2\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}}}{p(p^2 + \omega^2)}.$$

Pour appliquer la transformation de Cauchy à cette équation en p le facteur à considérer est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\beta^2 + 4\frac{p^2}{c^2}}}}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{e^{-p\frac{x}{c}\sqrt{1 + \frac{\beta^2 c^2}{4p^2}}}}{p(p^2 + \omega^2)}.$$

Nous avons à évaluer

$$(7) \qquad I = \frac{1}{2\pi j}\int_{c - j\infty}^{c + j\infty} \frac{e^{p\left(t - \frac{x}{c}\sqrt{1 + \frac{\beta^2 c^2}{4p^2}}\right)}}{p(p^2 + \omega^2)}\, dp.$$

L'expression à transformer a les pôles

$$p = -j\omega, \qquad p = 0, \qquad p = j\omega$$

et les points de branchement

$$p = -\frac{1}{2}jc\beta, \qquad p = \frac{1}{2}jc\beta.$$

La fonction à intégrer étant nulle quand p augmente indéfiniment dans le second et le troisième quadrants, le chemin d'intégration $c - j\infty$ à $c + j\infty$ suivant la parallèle à l'axe imaginaire est équivalent à celui de la figure (1) ou aux chemins C, C', C'', C''' de la figure 254-2.

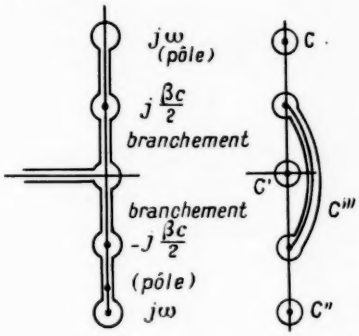


Fig. 254-2.

Les résidus sont :

a. Pour le pôle $p = 0$,

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\frac{x}{2}}}{\omega^2};$$

b. Pour le pôle $j\omega$,

$$-\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\sqrt{1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\omega^2}}\right)}}{2\omega^2} = -\frac{e^{j(\omega t - mx)}}{2\omega^2},$$

avec

$$m = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\omega^2}}.$$

c. Pour le pôle $-j\omega$ on obtient l'expression conjuguée de la précédente soit

$$-\frac{e^{-j(\omega t - mx)}}{2\omega^2}.$$

En ajoutant ces trois résidus on obtient

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\frac{x}{2}} - \cos(\omega t - mx)}{\omega^2}.$$

Portant dans l'expression de s, il vient

$$(8) \qquad s_c = -\rho_0 c\omega \Xi_0 e^{-\frac{1}{2}\beta x} \sin(\omega t - mx + \varphi),$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{2m};$$

d. Il reste à calculer l'intégrale sur le contour C'''. Remarquant que la plus grande valeur de $|p|$ sur le contour est inférieure à $\frac{\beta}{c}$ et que dans toute la bande de fréquences qui nous intéresse on a

$$|p|^2 < \frac{\beta^2}{c^2} < \frac{\omega^2}{4}.$$

On peut négliger p^2 par rapport à ω^2, écrire l'intégrale cherchée

$$(91) \qquad H = \frac{1}{2\pi j\,\omega^2}\int_{C'''} \frac{e^{pt-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+a^2}}}{p}\,dp$$

avec

$$a = \frac{\beta c}{2}.$$

Dérivons H par rapport à t. Il vient

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2\pi j\,\omega^2}\int_{C'''} e^{pt-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+a^2}}\,dp$$

et par conséquent

$$\int \frac{\partial H}{\partial t}\,dx = -\frac{c}{2\pi j\,\omega^2}\int_{C'''} \frac{e^{pt-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+a^2}}}{\sqrt{p^2+a^2}}\,dp + \xi(t).$$

Posons

$$p = \frac{u}{t-\frac{x}{c}} - a^2\frac{t-\frac{x}{c}}{4u},$$

d'où

$$\sqrt{p^2+a^2} = \left[\frac{u^2}{\left(t-\frac{x}{c}\right)^2} + a^2\left(\frac{t-\frac{x}{c}}{4u}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + a^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{u}{t-\frac{x}{c}} + a^2\frac{t-\frac{x}{c}}{4u},$$

$$dp = \left(\frac{1}{t-\frac{x}{c}} + a^2\frac{t-\frac{x}{c}}{4u^2}\right)du = \sqrt{p^2+a^2}\,\frac{du}{u},$$

$$pt - \frac{x}{c}\sqrt{p^2+a^2} = \frac{ut}{t-\frac{x}{c}} - \frac{a^2 t\left(t-\frac{x}{c}\right)}{4u}$$

$$-\frac{x}{c}\,\frac{u}{t-\frac{x}{c}} - a^2\frac{x}{c}\,\frac{t-\frac{x}{c}}{4u}$$

$$= u - \frac{a^2}{4u}\left(t^2-\frac{x^2}{c^2}\right).$$

Portant dans $\int \frac{\partial H}{\partial t}\,dx$, et remarquant que l'intégrale du second membre prise suivant C''' est égale à l'intégrale prise suivant la droite parallèle à l'axe imaginaire et d'abscisse $\alpha > 0$, il vient

$$\int \frac{\partial H}{\partial t}\,dx = -\frac{c}{2\pi j\,\omega^2}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \frac{e^{u-\frac{a^2}{4u}\left(t^2-\frac{x^2}{c^2}\right)}}{u}\,du + \xi(t)$$

$$= -\frac{c}{\omega^2}J_0\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right) + \xi(t).$$

Dérivant par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c}{\omega^2}\frac{d}{dx}\left[J_0\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)\right]$$

$$= -\frac{ax}{c\omega^2}\,\frac{J_1\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}},$$

d'où

$$H = \frac{ax}{c\omega^2}\int_t^\infty \frac{J_1\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}}\,dt + \chi,$$

χ étant une fonction indépendante de t qui se détermine en remarquant que pour $t=\infty$, p tend vers zéro dans (91). Il vient ainsi

$$\chi = \frac{1}{2\pi j\,\omega^2}\int_{C'''} \frac{e^{pt-\frac{ax}{c}}}{p}\,dp = \frac{e^{-\frac{ax}{c}}}{2\pi j\,\omega^2}\int_{C'''}\frac{e^{pt}}{p}\,dp = \frac{e^{-\frac{ax}{c}}}{\omega^2},$$

$$\chi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta x}}{\omega^2}.$$

Portant dans H, il vient

$$(92) \qquad H = \frac{\beta x}{2\omega^2}\int_t^\infty \frac{J_1\left(a\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}}\,dt + \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta x}}{\omega^2}.$$

En formant suivant (5), l'expression

$$(93) \qquad s_\tau = \frac{1}{2}\zeta_0\omega^2\Xi_0 c^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x}\left(\beta + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)H,$$

nous obtiendrons le terme correspondant s_τ de la pression. Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}H = \int_t^\infty \frac{\beta}{2\omega^2}\left[a\frac{J_1(v)}{v} + ax\frac{\partial}{\partial x}\frac{J_1(v)}{v}\right]dt - \frac{\beta}{2\omega^2}e^{-\frac{1}{2}\beta x}$$

$$= \int_t^\infty \frac{\beta}{2\omega^2}\left[a\frac{J_1(v)}{v} + \frac{ax}{v}\frac{\partial J_1(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right.$$

$$\left. - ax\frac{J_1(v)}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dt - \frac{\beta}{2\omega^2}e^{-\frac{1}{2}\beta x}$$

$$= \int_t^\infty \frac{\beta}{2\omega^2}\left[a\frac{J_1(v)}{v} - \frac{a^2x^2}{c^2}\frac{J_1'(v)}{v^2}\right.$$

$$\left. + \frac{a^2x^2}{c^2}\frac{J_1(v)}{v^3}\right]dt - \frac{\beta}{2\omega^2}e^{-\frac{1}{2}\beta x}$$

en posant

$$v = a\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}.$$

Utilisons la formule connue

$$v J_2(v) = J_1(v) - v J_1'(v),$$

il vient

$$(94)\quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\zeta}{2\omega^2}\left[a\frac{J_1(v)}{v} + \frac{a^2x^2}{c^2}\frac{J_2(v)}{v^2}\right] - \frac{\zeta}{2\omega^2}e^{-\frac{1}{2}\zeta x}.$$

On déduit maintenant de (92) et (93),

$$\left(\zeta + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)H = \frac{a\zeta}{2\omega^2}\left[(2+\zeta x)\int_t^\infty \frac{J_1(v)}{v}\,dt + \frac{2x^2a^2}{c^2}\int_t^\infty \frac{J_2(v)}{v^2}\,dt\right].$$

Portant enfin dans (93) et remplaçant a par $\frac{1}{2}\beta c$, il vient

$$(94)\quad s_\tau = \frac{1}{2}\zeta_0\Xi_0 c^2\beta^2 e^{-\frac{1}{2}\zeta x}\left[(2+\zeta x)\int_t^\infty \frac{J_1(v)}{v}\,dt + \frac{\zeta^2x^2}{2}\int_t^\infty \frac{J_2(v)}{v_2}\,dt\right].$$

La pression cherchée s est la somme des deux termes s_p et s_τ. Le premier est le terme de régime, le second le terme transitoire.

CHAPITRE SIXIÈME.

Conclusions.

Je voudrais en terminant mettre en lumière les caractéristiques essentielles de la méthode exposée.

En 1892 et dans les années qui suivirent, Heaviside, en énonçant ses règles de calcul n'avait en vue que les phénomènes transitoires et après lui ses disciples continuèrent dans le même sens sans appeler l'attention sur ce que, spécialement adaptée à cette étude et surclassant alors nettement les procédés classiques, la nouvelle méthode n'est pas moins avantageuse que ceux-ci pour les termes de régime. Équivalente dans le cas des seconds membres constants ou périodiques, elle peut apporter des modes de calcul nouveaux dans les autres cas, par emploi de l'intégration de fonctions de variables complexes. Après extension et mise au point, la théorie se présente ainsi comme utile pour l'étude complète des systèmes linéaires, à caractéristiques localisées ou continues. Son domaine d'application peut être étendu bien au delà, et englober d'autres types d'équations intégrales ou différentielles.

Le technicien placé devant un problème déterminé, a besoin non de la solution la plus générale du système d'équations qui représentent le fonctionnement, mais de la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (et éventuellement aux conditions aux limites) données. Dans la méthode classique, celle-ci n'est obtenue qu'après la solution générale, c'est-à-dire par des détours souvent bien longs. Dans le nouveau procédé conditions initiales (et conditions aux limites dans le cas d'équations aux dérivées partielles si les intégrales en x, y, z sont obtenues de la même manière) se trouvent introduits dès l'abord; c'est le problème particulier qui est traité dès le début, c'est sa solution qui est atteinte. C'est le premier bénéfice.

Un second consiste pour le technicien pressé d'aboutir dans l'automatisme que procure l'existence de tables de fonctions associées. Ainsi se trouve épargné dans un grand nombre de cas le calcul des transformations.

C'est une admirable réussite que des études mathématiques mettant en jeu une théorie aussi abstraite que celle des fonctions de nombres complexes, exigeant une mise au point aussi délicate que celle des conditions d'existence des intégrales de Laplace et de Cauchy, ou de la validité du théorème d'inversion des deux transformations, aboutissent finalement à un mécanisme aussi simple, d'un fonctionnement à peu près automatique, où n'interviennent que des opérations élémentaires.

Pourtant les formulaires ne suffiront pas toujours et, surtout dans les problèmes innombrables mettant en jeu les équations aux dérivées partielles, il sera souvent nécessaire d'effectuer les calculs des transformations, de vérifier la convergence des intégrales, la réalisation des conditions d'inversion, d'intégrer des équations différentielles de types différents de ceux que nous avons étudiés. Il s'agit là de questions délicates et difficiles, dignes de la sagacité de mathématiciens éprouvés.

TABLEAU I. — *Règles de calcul.*

Nos	RÈGLES	OBSERVATIONS
	On suppose $f(p) \sqsubset F(t)$, $g(p) \sqsubset G(t)$, $F_0, F'_0, \ldots, F^{(n)}_0$ sont les valeurs de $F(t), \frac{dF(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n F(t)}{dt^n}$ pour $t = 0$.	
	Substitution linéaire dans $f(p)$.	
1	$\frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) \sqsupset f(ap)$	$a > 0$
2	$e^{-bt} F(t) \sqsupset f(p+b)$	b complexe quelconque
3	$\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}t} F\left(\frac{t}{a}\right) \sqsupset f(ap+b)$	$a > 0$, b quelconque complexe
	Substitution linéaire dans $F(t)$.	
4	$F(at) \sqsupset \frac{1}{a} f\left(\frac{p}{a}\right)$	$a > 0$
5	$\left.\begin{matrix} F(t-b) & \text{pour } t-b \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t-b < 0 \end{matrix}\right\} \sqsupset e^{-bp} f(p)$	$b > 0$
6	$\left.\begin{matrix} F(at-b) & \text{pour } at-b \geq 0 \\ 0 & \text{pour } at-b \leq 0 \end{matrix}\right\} \sqsupset \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}p} f\left(\frac{p}{a}\right)$	$a > 0$, $b > 0$
	Dérivation de $F(t)$.	
7	$\frac{dF(t)}{dt} \sqsupset -F_0 + p f(p)$	
8	$\frac{d^n F(t)}{dt^n} = -(F_0^{n-1} + p F_0^{n-2} + \ldots + p^{n-1} F_0) + p^n f(p)$	
	Dérivation de $f(p)$.	
9	$t F(t) \sqsupset -\frac{df(p)}{dp}$	
10	$t^n F(t) \sqsupset (-1)^n \frac{d^n f(p)}{dp^n}$	
11	$t \frac{dF(t)}{dt} \sqsupset -\frac{d[p f(p)]}{dp}$	
12	$t^n \frac{d^n F(t)}{dt^n} \sqsupset (-1)^n \left(\frac{d}{dp}\right)^n [p^n f(p)]$	
	Intégration de $F(t)$.	
13	$\int_0^t F(t)\,dt \sqsupset \frac{1}{p} f(p)$	
14	$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n \text{ intégrations}} F(t)\,dt \sqsupset \frac{1}{p^n} f(p)$	

TABLEAU I. — *Règles de calcul* (suite).

N°	RÈGLES	OBSERVATIONS
	Intégration de $f(p)$.	
15	$\dfrac{F(t)}{t} \sqsupset \displaystyle\int_p^\infty f(p)\,\mathrm{d}p$	
16	$\dfrac{F(t)}{t^n} \sqsupset \underbrace{\displaystyle\int_p^\infty \mathrm{d}p \int_p^\infty \mathrm{d}p \ldots \int_p^\infty}_{n \text{ intégrations}} f(p)\,\mathrm{d}p$	
17	$\displaystyle\int_0^t \frac{F(t)}{t} \sqsupset \frac{1}{p}\int_p^\infty f(p)\,\mathrm{d}p$	
	Addition.	
18	$F(t)+G(t) \sqsupset f(p)+g(p)$	
	Série.	
19	$F_1(t)+F_2(t)+\ldots+F_n(t)+\ldots \sqsupset f_1(p)+f_2(p)+\ldots+f_n(p)+\ldots$	Les deux séries étant convergentes
20	$c\,F(t) \sqsupset c\,f(p)$	c constant
	Produit de composition.	
21	$\displaystyle\int_0^t F(t-\tau)\,G(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t F(\tau)\,G(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \sqsupset f(p)\,g(p)$	

TABLEAU II. — *Couples de fonctions associées.*

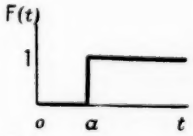
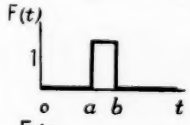
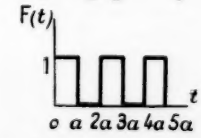
N°	Fonction $F(t)$.	Fonction $f(p)$.	OBSERVATIONS
	Fonction unité.		
	$1 \sqsupset \dfrac{1}{p}$		
1	$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ pour } t \geq a \\ 0 \text{ pour } a > t \geq 0 \end{array}\right\}$	$\sqsupset \dfrac{e^{-ap}}{p}$	
2	$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ pour } b \geq t \geq a \\ 0 \text{ pour } 0 \leq t < a \text{ et } t > b \end{array}\right\}$	$\sqsupset \dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}$	
3	$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ pour } 0 \leq t \leq a,\ 2a \leq t \leq 3a \ldots \\ 0 \text{ pour } a < t < 2a,\ 3a < t < 4a \ldots \end{array}\right\}$	$\sqsupset \dfrac{1}{p}(1-e^{-ap}+e^{-2ap}+e^{-3ap}+\ldots)$	

TABLEAU II. — *Couples de fonctions associées* (suite).

Nos	Fonction $F(t)$.		Fonction $f(p)$.	OBSERVATIONS
	Fonction impulsive unité appliquée en $t = 0$. Elle n'est différente de zéro que dans l'intervalle infiniment petit de 0 à ε. On a			
4	$\int_0^\varepsilon F(t)\,dt = \int_0^t F(t)\,dt = 1$			
5	$F(t)$	$\sqsupset$	1	
6	t^α	$\sqsupset$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\mathcal{R}\alpha > -1$
7	t^α	$\sqsupset$	$\dfrac{\alpha!}{p^{\alpha+1}}$	α réel, entier et > -1
8	e^{at}	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\mathcal{R}p > \mathcal{R}a$
9	$\sin t$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p^2+1}$	
10	$\cos t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2+1}$	
11	$\sin \omega t$	$\sqsupset$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
12	$\cos \omega t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
13	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{\omega\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	
14	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{p\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	
15	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\sqsupset$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
16	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
17	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{\omega\cos\varphi + (p+\alpha)\sin\varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
18	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{(p+\alpha)\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	
19	$\operatorname{sh} t$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p^2-1}$	
20	$\operatorname{ch} t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2-1}$	
21	$\operatorname{sh} \varpi t$	$\sqsupset$	$\dfrac{\varpi}{p^2-\varpi^2}$	
22	$\operatorname{ch} \varpi t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2-\varpi^2}$	
23	$e^{-\alpha t}\operatorname{sh} \varpi t$	$\sqsupset$	$\dfrac{\varpi}{(p+\alpha)^2-\varpi^2}$	
24	$e^{-\alpha t}\operatorname{ch} \varpi t$	$\sqsupset$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\varpi^2}$	

Tableau II. — *Couples de fonctions associées* (suite).

N°	Fonction $F(t)$.		Fonction $f(p)$.	OBSERVATIONS
25	$e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}(\varpi t+\psi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{\varpi\,\mathrm{ch}\,\psi+(p+\alpha)\,\mathrm{sh}\,\psi}{(p+\alpha)^2-\varpi^2}$	
26	$e^{-\alpha t}\,\mathrm{ch}(\varpi t+\psi)$	$\sqsupset$	$\dfrac{(p+\alpha)\,\mathrm{ch}\,\psi+\varpi\,\mathrm{sh}\,\psi}{(p+\alpha)^2-\varpi^2}$	
27	$t\sin t$	$\sqsupset$	$\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$	
28	$t\cos t$	$\sqsupset$	$\dfrac{1-p^2}{(p^2+1)^2}$	
29	$t^{\alpha}e^{\beta t}$	$\sqsupset$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}}$	$\mathcal{R}p>\mathcal{R}\beta$
30	$\dfrac{e^{at}-1}{a}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p(p-a)}$	
31	$\dfrac{e^{at}-e^{-bt}}{a-b}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$	
32	$\dfrac{a\,e^{at}-b\,e^{bt}}{a-b}$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}$	
33	$\dfrac{e^{at}}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{e^{bt}}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{e^{ct}}{(c-a)(c-b)}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	
34	$J_0(t)$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	
35	$J_\nu(t)$	$\sqsupset$	$\dfrac{(\sqrt{1+p^2}-p)^\nu}{\sqrt{1+p^2}}$	$\mathcal{R}\nu>-1$
36	$\dfrac{J_\nu(at)}{t}$	$\sqsupset$	$\dfrac{\sqrt{p^2+a^2}-p}{\nu a^\nu}$	$\mathcal{R}\nu>0$
37	$J_0(a\sqrt{t})$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p}e^{-\frac{a^2}{4p}}$	α réel
38	$L_n(t)$ = polynome de Laguerre $L_n(t)=\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$ $=\sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu\dfrac{n}{\nu}\dfrac{t^\nu}{\nu!}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p-1}{p}\right)^n$	$n\geq 0$
39	$\dfrac{\cos x\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\sqsupset$	$\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$	x réel
40	$\dfrac{\sin x\sqrt{t}}{\pi}$	$\sqsupset$	$\dfrac{x}{2\sqrt{\pi}\,p^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4p}}$	»
41	$\dfrac{\mathrm{ch}\,x\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$	$\sqsupset$	$\dfrac{e^{\frac{x^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$	»
42	$\dfrac{\mathrm{sh}\,x\sqrt{t}}{\pi}$	$\sqsupset$	$\dfrac{x}{2\sqrt{\pi}\,p^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{x^2}{4p}}$	»

TABLEAU II. — *Couples de fonctions associées* (suite et fin).

Nos	Fonction $F(t)$.		Fonction $f(p)$.	OBSERVATIONS
43	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\sqsupset$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	
	$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t - \frac{t^3}{1!\,3} + \frac{t^5}{2!\,5} - \frac{t^7}{3!\,7} + \cdots\right)$			
44	$\operatorname{erf}\sqrt{t}$	$\sqsupset$	$\frac{1}{p(1+p)^{\frac{1}{2}}}$	
45	$1 - \operatorname{erf}\frac{a}{2\sqrt{t}}$	$\sqsupset$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	
46	$\frac{1}{\sqrt{t^2 - a}}$	$\sqsupset$	$K_0(ap)$	
47	$\operatorname{arc\,cotg}\frac{t}{a}$	$\sqsupset$	$\frac{K_0(ap)}{p}$	

MÉTHODES ET APPAREILLAGE DE MESURE DE L'ÉMISSION DES CATHODES A OXYDES

PAR J. RIETHMÜLLER,

Ingénieur au Laboratoire de Recherches Physicochimiques
de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *Le but de ce travail est de décrire la méthode et l'appareillage utilisés au Laboratoire des Recherches physicochimiques de la C. S. F. pour étudier l'émission électronique des cathodes à oxydes.*

La première partie précise le caractère essentiellement comparatif de la méthode adoptée : Les lampes employées sont des duodiodes qui, après pompage, sont soumises à la « formation », fonctionnement à température constante et sous un débit convenable, cela afin d'améliorer considérablement leur pouvoir émissif. Les lampes sont ensuite stabilisées par une épreuve à la température de mesure (700° C environ), avant que ne soit abordée l'étude proprement dite de l'émission cathodique. Les mesures sont faites en régime d'impulsions.

La seconde partie traite de l'appareillage utilisé pour le pompage, la formation, les essais de durée (régulateur de tension, bâtis de distribution et de réglage, alimentation anodique) et les mesures d'émission (duodiode, générateur d'impulsions, variateur de brillance et discriminateur).

Les résultats d'application de ces méthodes feront l'objet d'une note ultérieure.

Introduction.

Il est inutile de s'étendre longuement sur la difficulté de mesurer ou de comparer par les méthodes ordinaires (statiques) l'émission électronique des cathodes à oxydes, si ces cathodes sont « bonnes ». En effet, si l'on cherche à les étudier à leur température normale d'emploi ou à une température peu inférieure, on ne peut atteindre sur la caractéristique $I = f(V)$, que des points entièrement situés dans la région de charge spatiale, sous peine de détruire en peu de temps la couche émissive, ou, tout au moins, de la modifier très profondément.

Si l'on cherche à tourner la difficulté en abaissant la température d'une façon considérable, on tombe dans d'autres difficultés : il est manifeste que les divers équilibres qui conditionnent l'émission sont différemment influencés par la température et, sur des cathodes différentes, les émissions à basse température ne sont pas proportionnelles aux émissions à température normale. Les mesures faites à des températures très éloignées des températures normales ne nous semblent donc nullement légitimes.

Depuis longtemps déjà, des chercheurs ont pensé qu'on pourrait obtenir de bonnes mesures si l'on pouvait les faire en des temps très courts, inférieurs au millième de seconde.

Pataï et Franck (*Zeitschrift für technische Physik*, 1935, n° 9) emploient la décharge d'un condensateur et mesurent au voltmètre de crête l'intensité maxima du courant.

Champeix, dans sa thèse, emploie le même procédé avec des variantes (usage de thyratrons) qui en rendent l'usage beaucoup plus précis et commode.

Ces auteurs travaillent sur des lampes de modèles courants (réception), leurs dispositifs permettant de produire et d'étudier des tops de très grande intensité.

R. L. Sproull (*Phys. Rev.*, 67, n°s 5 et 6, 1945) emploie un montage à tubes à vide, permettant d'appliquer aux diodes spéciales qu'il construit pour études, des tops rectangulaires de tension connue, la valeur et la variation de l'intensité au cours du top étant explorées à l'aide d'un dispositif à pentode saturée et voltmètre amplificateur.

Les méthodes par décharge de condensateur sont commodes pour étudier les lampes toutes

faites, lorsque la surface de cathode ne peut être réduite à une faible valeur et que, par suite, les courants émis peuvent être considérables.

Toutefois, ce sont des méthodes « aveugles » en ce sens qu'elles ne donnent qu'un nombre : l'intensité maxima qui a traversé le circuit au cours du top. Elles ne donnent aucun renseignement sur la variation de l'émission pendant le top. Enfin le relevé d'une caractéristique $i = f(V)$ demande une série de mesures, ce qui, outre l'incommodité, offre l'inconvénient de modifier beaucoup la lampe au cours du relevé.

La méthode de Sproull est très bien adaptée au but que l'auteur poursuivait : étude de la variation de l'émission au cours du top [1]. (On aurait d'ailleurs avantage, nous semble-t-il, à remplacer le délicat appareillage d'exploration de l'intensité par un oscillographe et une base de temps à balayage intermittent commandé.) Pour une étude générale des émissions, elle présente comme les précédentes l'inconvénient de ne fournir à la fois qu'un point de la caractéristique, en sorte que si l'on veut avoir des renseignements complémentaires sur la netteté de la « saturation » et sur la pente de la « droite de Schottky », il faut faire une série de mesures à des tensions différentes, ce qui est long et modifie la lampe. Lorsque nous avons commencé nos recherches sur l'émission des cathodes à oxydes, nous avons pensé que ce qui donnerait le plus de renseignements dans le moins de temps serait de faire tracer sur un oscillographe cathodique la courbe $i = f(V)$ caractéristique de la diode étudiée.

C'est dans cette intention qu'a été construit tout notre dispositif d'étude.

Le tracé d'une *caractéristique* pendant un top demande que celui-ci soit tel que la tension croisse, puis décroisse régulièrement. On ne peut utiliser de tops rectangulaires. On pourrait utiliser des tops triangulaires, de préférence isocèles. Mais ces tops triangulaires *isocèles* sont très difficiles à faire si l'on veut que leur durée soit indépendante de leur fréquence. On obtient beaucoup plus facilement des tops formés d'une montée abrupte, suivie d'une descente exponentielle. Les pentes des deux flancs sont très inégales et de tels tops se prêtent mal au tracé de caractéristiques. Nous avons choisi pour notre étude des tops ayant la forme d'une demi-sinusoïde ou, plutôt, d'une demi-pseudosinusoïde. Ces tops sont presque rigoureusement symétriques, assez faciles à faire, et d'une extrême stabilité (étant engendrés à partir d'un circuit oscillant).

Afin de pouvoir cependant reproduire des conditions identiques à celles de Sproull lorsque nous voudrons confronter nos résultats aux siens, nous avons muni notre installation de la possibilité de travailler en tops rectangulaires.

Nous ferons dès maintenant une distinction très importante. On peut en effet utiliser les mesures en impulsions dans deux buts bien différents :

1° On peut chercher à connaître le comportement d'une cathode en régime permanent d'impulsions très violentes et très espacées. Ce régime permanent d'impulsions, autrefois sans grand intérêt, présente maintenant beaucoup d'applications (Radar, etc.). Ce cas est le plus simple : il suffit que les tops d'étude aient la durée et la fréquence des tops d'utilisation. On peut alors faire les mesures sans craindre de modifier beaucoup la lampe, puisque les conditions d'étude sont identiques aux conditions d'utilisation. Dans ce cas, l'essai de durée doit naturellement être fait dans les conditions d'utilisation, c'est-à-dire en régime permanent d'impulsions.

2° On peut au contraire demander aux mesures en impulsions des renseignements sur l'état émissif d'une cathode destinée à être utilisée en régime normal (statique, classe A, B ou C).

Dans ce cas, les conditions d'étude sont très différentes des conditions d'utilisation et de grandes précautions doivent être prises si l'on veut que les mesures en impulsions aient une bonne signification.

Ce deuxième cas a toujours été le nôtre et dans les descriptions qui vont suivre, on trouvera le détail des précautions que l'expérience nous a montrées indispensables. Si l'on voulait faire des études dans le premier cas avec une telle installation, on pourrait s'affranchir de ces précautions.

Nous allons décrire d'abord les méthodes que nous employons pour étudier les émissions, puis les appareils qui permettent de mettre en œuvre ces méthodes.

Méthodes.

Le but de nos recherches étant de déterminer l'influence des différents facteurs sur l'émission électronique des cathodes à oxydes (avec, naturellement, essai d'application des résultats pour obtention de cathodes très émissives et de longue durée), nous avons été amenés à comparer les

[1] Sproull trouve que cette variation est toujours une décroissance. Nous observons assez fréquemment des croissances, et nous en avons observé dans des conditions qui nous semblent très voisines de celles utilisées par l'auteur. Nous avons l'intention de poursuivre ces recherches lorsque nous en aurons la possibilité.

émissions de diverses cathodes. Très rapidement, nous avons constaté, comme l'indiquait déjà en 1935, Benjamin (*Phil. Mag.*, t. 20, p. 1), que la comparaison n'est valable qu'entre deux cathodes enfermées dans la même ampoule. (Le pompage simultané de deux ampoules différentes renfermant chacune une cathode n'assure pas une validité suffisante à la comparaison; les causes de ces phénomènes, qui touchent certainement de très près le fameux problème de l' « émission faible », ne sont pas encore exactement connues.)

Ce fait primordial nous a imposé de construire toujours des lampes doubles (doubles diodes) et de ne conduire notre étude que par comparaisons successives.

Un autre fait dont nous avons peu à peu découvert l'importance est la modification de l'émission sous l'influence des tops d'étude. Ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut, ce fait ne serait nullement gênant pour étudier en tops une cathode destinée à fonctionner uniquement en tops. Par contre, il peut conduire à de grossières erreurs si l'on désire être renseigné sur les qualités de la cathode en service normal. En effet, les tops de mesure, qui provoquent des débits instantanés pouvant dépasser 4 A/cm² et parfois 10 A/cm² (donc 80 ou parfois 200 fois ce que l'on admet comme courant permanent normal) modifient considérablement l'émission des cathodes, même s'ils sont suffisamment brefs et suffisamment espacés pour ne demander qu'un débit moyen égal à une petite fraction du courant permanent normal. Ils produisent parfois un affaiblissement de l'émission; mais, en règle générale, sur les cathodes que nous avons étudiées, ils produisent un accroissement considérable des qualités émissives. Si bien qu'au bout de quelques secondes de fonctionnement en tops, on a affaire à une lampe tout à fait différente de celle qui travaillait en service normal.

Nous avons observé par contre que les valeurs indiquées par *les premiers tops* appliqués à une lampe qui vient de travailler en statique ou en régimes A, B ou C ordinaires sont en bon accord avec la qualité de la dite lampe au point de vue usage normal, lorsque cette qualité est suffisamment basse pour être appréciable par des essais en statique.

Nous avons supposé — ce qui nous paraît raisonnable — que ce bon accord persiste même lorsque la qualité de la lampe est suffisamment haute pour ne plus pouvoir être appréciée par des essais statiques. Nous considérons donc comme représentatives des qualités en service normal, les valeurs fournies par une très courte mesure en tops suivant sans intervalle de temps notable une période de service normal.

La condition : « sans intervalle de temps notable » est imposée par le fait que le repos lui-même modifie les lampes et que si on laisse une lampe pendant quelques minutes ou même quelques secondes sans débit anodique, la mesure en tops qui vient ensuite montrera fréquemment une émission plus grande que si cette mesure était faite très peu de temps après la période de service normal. Cette erreur peut être assez importante dans certains cas. On l'évite en réduisant à une fraction de seconde l'intervalle entre le fonctionnement normal et la mesure en tops.

Il faut enfin prendre soin de « stabiliser » la lampe par un fonctionnement suffisamment long à la température à laquelle doit se faire la mesure en tops lorsque, comme c'est fréquent, la lampe vient de subir un traitement (formation ou essai de durée) à une température différente de celle où l'on doit l'étudier. Sans cette précaution, on s'expose à obtenir beaucoup de résultats non reproductibles.

Sproull (*loc. cit.*) signale également la nécessité d'une stabilisation, mais pense qu'on peut l'abréger considérablement en l'effectuant à une température supérieure de 100° à celle de la mesure. Cette facilité lui est peut-être permise parce qu'il applique les tops en permanence sur la lampe (étude en régime permanent d'impulsions). Mais pour le mode de mesure que nous avons adopté, il ne nous semble pas que l'on puisse accélérer artificiellement la stabilisation.

La méthode d'étude que nous suivons actuellement procède naturellement des constatations précédentes.

Construction des tubes.

La construction de nos lampes sera décrite dans le chapitre suivant. Disons seulement maintenant que ce sont des doubles diodes, la surface active étant de 13 à 14 mm².

Pompage.

Leur pompage ne sera pas décrit, car les méthodes de pompage sont *objet* d'études et non méthodes d'études. Nous dirons seulement que les pompages sont conduits à l'aide de pyromètres optiques, et non « à l'intensité » ou « à la tension ».

Formation.

Après pompage, les lampes sont soumises à une formation. Il est, en effet, assez peu intéressant de

les étudier en tops aussitôt après le pompage, l'expérience nous ayant enseigné que les valeurs mesurées alors n'avaient pas de rapport constant avec les valeurs assez stables que prendront les émissions après un fonctionnement suffisamment prolongé, valeurs seules intéressantes en définitive. (Ne pouvant effectuer qu'un nombre limité de mesures par jour, nous préférons ne faire que celles qui ont le plus de chances d'être significatives.)

En tout cas, toutes les fois que nous avons procédé à des mesures d'émission sur des tubes sortant du pompage, nous les avons trouvés très médiocrement émissifs, même si ces tubes semblent bons en essai statique et même s'ils ont subi 1 h d' « activation sur pompe ».

Une « formation » plus prolongée, effectuée après scellement de la lampe, à une température et sous un débit convenables, améliore considérablement l'émission. Les méthodes de formation sont également *objet* d'études. A titre d'indication, nous dirons seulement que la formation que nous utilisons généralement actuellement comprend :

16 h de fonctionnement à 850° C sous une tension anodique telle que toute lampe assez bonne pour qu'on ne sorte aucunement de la région de charge spatiale, débite 100 mA/cm², puis 6 ou 7 h de fonctionnement à 800° sous une tension anodique telle que toute lampe suffisamment bonne débite 50 mA/cm².

De légères variations de température entraînent des variations notables de l'efficacité de la formation. Il faut donc, pour donner toute leur rigueur à nos comparaisons, effectuer la formation (et, ensuite, les essais de durée) sur des bâtis alimentés en courant régulé automatiquement et conçus en sorte que le réglage de l'intensité dans chaque filament soit facile et stable.

Les tensions anodiques doivent également être régulées.

Afin de pouvoir étudier l'influence (sur la formation et sur la tenue en durée) de la forme de la tension provoquant le débit anodique, nous nous sommes réservés la possibilité d'alimenter chaque anode :

Soit en tension constante (*statique*; analogie : classe A).

Soit en tension alternative sinusoïdale (*alternatif*; analogie : classe B).

Soit en tension régulée intermittente (*pulsé*; rapport $\frac{\text{temps actif}}{\text{période}} = \frac{1}{3}$; analogie : classe C).

Les valeurs des tensions sont fixées pour obtenir les débits voulus sur les lampes suffisamment bonnes pour travailler entièrement en région de charge spatiale.

Les températures apparentes des oxydes sont déterminées à l'aide de pyromètres optiques. Nous avons en cours des études dans le but de pouvoir atteindre la température vraie à partir des visées pyrométriques.

Mesure d'émission.

Aussitôt après la formation, la lampe double subit la première mesure d'émission.

La température que nous avons habituellement adoptée pour les mesures d'émission est 700° C. Nous sommes parfois contraints de descendre à 650° C pour étudier des lampes exceptionnellement bonnes ou de monter à 800° C pour étudier des « émissions faibles ».

La température de mesure étant généralement différente de la température finale de formation (ou ensuite, d'essai de durée) la mesure proprement dite doit être précédée d'une stabilisation.

a. Stabilisation. — Actuellement, nous stabilisons par un fonctionnement de 45 mn à la température de mesure (700° C habituellement) sous une tension anodique provoquant, sur toute lampe suffisamment bonne, un débit anodique de 50 mA/cm². Ce débit peut être obtenu, soit en statique, soit en alternatif, soit en pulsé, comme pour la formation et l'essai de durée.

Un inverseur spécial permet d'interrompre la tension anodique de stabilisation au moment voulu et d'appliquer sur l'anode les tops de mesure. Nous avons vu plus haut que cette manœuvre doit être faite très rapidement (pour ne pas laisser à la lampe le temps de se modifier par le repos) et qu'on doit se tenir prêt à lire sur l'oscillographe les valeurs données par les premiers tops de mesure (pour ne pas modifier la lampe par le travail en tops).

Les deux doubles diodes sont stabilisées simultanément, puis mesurées en tops l'une après l'autre. Étant données la longueur de la stabilisation et la brièveté de la mesure, cette façon de faire est la meilleure [1].

[1] Nos premières lampes avaient une anode double, mais commune. On devait donc stabiliser, puis étudier l'une après l'autre les deux diodes, d'où, pour la deuxième, un temps de repos entre formation (ou durée) et stabilisation. Il s'ensuivit parfois des erreurs notables, qui nous contraignirent à munir nos lampes d'anodes séparées.

b. Mesure en impulsions. — La forme des tops étant choisie (demi-pseudosinusoïde, comme il a été dit plus haut), il reste à déterminer leur amplitude, leur durée et leur fréquence en vue d'obtenir le maximum de renseignements, tout en modifiant le moins possible la lampe. Il y a un compromis à établir.

La deuxième condition demande que les trois facteurs ci-dessus indiqués soient aussi réduits que possible. Au contraire, il faut que l'amplitude soit grande si l'on veut s'avancer loin vers ou dans la région de saturation; il faut que la durée ne soit pas trop réduite si l'on veut avoir une idée de l'évolution de l'émission en cours du top; il faut enfin que la fréquence soit suffisante pour donner aux images une luminosité acceptable (le produit : durée × fréquence, représentant le rapport d'éclairement, doit être de l'ordre de $\frac{5}{1000}$ pour un travail commode et ne doit guère descendre au-dessous de $\frac{2}{1000}$).

Il faut toutefois limiter ces trois facteurs en sorte que les modifications de la lampe par la mesure ne soient pas trop rapides et surtout ne soient que passagères, la lampe devant reprendre son état normal après un peu de fonctionnement en service normal.

Un autre phénomène conduit à limiter l'amplitude et la durée des tops dans certains cas, c'est l'apparition d'étincelles sur la cathode lors de l'application des tops de mesure. Ces étincelles détériorent rapidement la couche d'oxydes.

N'ayant pas encore de jauges individuelles montées sur chaque lampe, nous ne pouvons affirmer que ce phénomène a lieu dans un vide excellent. Toutefois, l'observation de lampes doubles dans lesquelles un des filaments donne toujours des étincelles et l'autre jamais et la constatation du fait que la combinaison d'un certain métal support avec un certain type de recouvrement donne presque toujours des cathodes sujettes à ce phénomène semblent nous autoriser à penser que la cause n'est pas un bombardement d'ions positifs. Ce phénomène ne se manifeste que sur certaines cathodes, toujours bonnes ou très bonnes, pouvant émettre beaucoup d'électrons à basse température [1].

Pour l'éviter, on peut réduire l'amplitude des tops, mais c'est un mauvais remède, puisqu'on se confine ainsi dans la région où toutes les lampes suffisamment bonnes sont identiques. Ayant remarqué que ces étincelles se produisaient toujours dans la deuxième moitié du top, donc après une certaine durée de passage du courant, nous avons pensé qu'on les éviterait en réduisant suffisamment la durée des tops; ce que l'expérience a confirmé. Le générateur d'impulsions doit donc pouvoir fournir des impulsions (demi-pseudosinusoïdales) de durées et de fréquences diverses et d'amplitude réglable.

Au sujet du réglage d'amplitude, signalons tout de suite qu'il est très souhaitable que l'amplitude puisse être réglée d'avance, avant application des tops sur la lampe, afin que les premiers tops, les plus intéressants, ne soient pas consacrés à faire le réglage de l'amplitude. Il est donc souhaitable que le générateur puisse fournir des tops de forme et d'amplitude indépendantes de la charge (jusqu'à une certaine charge limite, bien entendu).

Nous avons d'abord travaillé avec des tops de durée : 450 μ sec, puis 280 μ sec; mais ces durées nous semblent trop grandes, pour le genre d'étude que nous faisons. Si elles mettent bien en évidence les phénomènes de fatigue et d'activation en cours du top, par là même modifient-elles trop l'émission, et les résultats, plus spectaculaires, nous paraissent moins significatifs.

Les conditions que nous utilisons le plus souvent pour nos mesures sont les suivantes :

Amplitude des tops : 500 V. Durée des tops : 100 μ sec. Fréquence : 50 p/sec.

Nous conservons la possibilité d'utiliser d'autres conditions dès qu'il nous semble y avoir intérêt à la faire.

Avec les dimensions géométriques adoptées pour nos lampes, la tension de 500 V provoque, sur toute cathode bonne et suffisamment chauffée (800-850°) pour qu'on soit encore entièrement en région de charge spatiale, un courant de 510 mA environ, correspondant à une densité de courant cathodique de 3,6 A/cm².

A la température de 700° C, la majorité des cathodes ne sont plus en régime de charge spatiale pour une tension appliquée de 500 V. On peut donc voir sur l'écran de l'oscillographe la forme de la courbe caractéristique, la plus ou moins grande netteté de la « saturation », l'inclinaison plus ou moins grande de la « droite de Schottky », et aussi la fatigue ou l'activation en cours du top, phénomène dont nous parlerons plus loin.

[1] Ces étincelles ne se produisent que pour des champs extrêmement élevés et ne peuvent apparaître en fonctionnement normal. Elles pourraient, au contraire, détruire en peu d'instants une cathode travaillant en régime permanent d'impulsions, si la cathode est très émissive, si la température est suffisamment basse (700°) et si d'autres conditions non encore connues en permettent l'apparition.

De très bonnes cathodes sont encore en régime de charge spatiale à 700° C et 500 V. Nous les étudions, soit en laissant les tops à 500 V et en réduisant la température à 650° C, soit en laissant la température à 700° C et en utilisant des tops de 1000 V. Sur une lampe bonne et suffisamment chauffée (800-850°), les tops de 1000 V provoquent un courant de 1,4 A correspondant à une densité de courant cathodique de 10 A/cm² (¹).

Lorsqu'on travaille avec des tops de 1000 V, il faut réduire la durée à 30 μ sec, afin de conserver un courant moyen convenable.

Lorsqu'on étudie spécialement les modifications de l'émission en cours du top, on prend des durées plus grandes, mais on abaisse la fréquence, en sorte que le produit : fréquence × durée soit toujours voisin de $\frac{5}{1000}$ pour des tops de 500 V et de $\frac{1.6}{1000}$ pour des tops de 1000 V, ce qui assure au courant moyen une valeur à peu près constante (pour toute lampe suffisamment bonne) de 1,4 mA, soit une densité cathodique moyenne de 10 mA/cm² (²).

c. Fatigue et activation en cours du top. — Nous avons signalé plus haut les modifications de l'émission par les tops répétés (presque toujours un accroissement de l'émission). Mais l'émission se modifie pendant le top lui-même, et ceci est un autre phénomène. Ce phénomène forme, à lui seul, le sujet de l'étude de Sproull citée plus haut.

Contrairement aux résultats de cet auteur, nous trouvons la plus grande diversité dans le comportement des cathodes pendant le top.

Les unes ne sont pas modifiées pendant le top, si bien que le courant prend au retour, pour une même valeur de la tension, la valeur qu'il avait à l'aller. Les courbes d'aller et de retour sont confondues en une seule (*fig.* 1). Nous disons que la lampe est *réversible*. (En général, les lampes sont réversibles, ou bien lorsque leur émission est très bonne, le top demeurant presque entièrement dans la région de charge spatiale, qui est par nature réversible; ou bien lorsque leur émission est faible, le courant émis étant insuffisant pour modifier la cathode pendant sa durée. On trouve cependant des lampes moyennes réversibles).

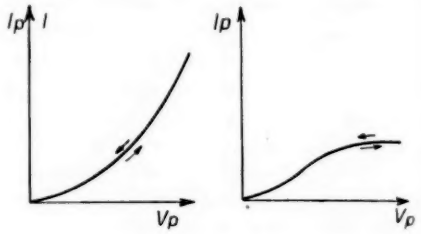


Fig. 1. — Réversibilité.

a, en régime de charge spatiale.
b, en régime de « saturation ».

D'autres voient leur émission diminuer au cours du top. La courbe de retour demeure en dessous de celle d'aller. Nous disons que la lampe présente de la *fatigue*. Ce phénomène est fréquent, surtout avec d'assez mauvaises cathodes. Toutefois nous sommes loin de lui accorder la généralité que lui attribue Sproull. Cette divergence peut provenir de la nature des cathodes, ou bien de la façon de les étudier; nous essaierons de tirer cela au clair ultérieurement, en nous plaçant dans des conditions d'étude identiques à celles de Sproull.

Quoi qu'il en soit, nous observons fréquemment le phénomène d'*activation* : l'émission augmente pendant le top et la courbe de retour se place au-dessus de celle d'aller.

Il faut bien noter que la modification de l'émission pendant le top n'a aucun rapport constant avec la modification de l'émission par une succession de tops : un cas très fréquent est celui d'une lampe présentant une fatigue nette et dont, cependant, l'émission s'améliore très rapidement par le fonctionnement en tops. Les phénomènes physiques réels se passant sur la cathode sont certainement multiples et on n'observe que des résultantes.

La fatigue et l'activation se traduisent toutes deux par le même aspect sur l'écran de l'oscillographe; la courbe forme une boucle. Pour les distinguer, nous avons réalisé un dispositif qui sera décrit plus loin (discriminateur), qui produit une brève extinction du spot dans le trajet de retour. On a ainsi une petite interruption dans le tracé de la branche de retour, qui permet de la distinguer à coup sûr (*fig.* 2 et 3). Certaines lampes présentent

(¹) Certaines cathodes très bonnes, assez rares, donnent cette valeur d'emblée à 700° C. La plupart des cathodes normales donnent beaucoup moins lors de l'application des premiers tops, mais parviennent, en quelques minutes de fonctionnement en tops, à fournir les 10 A/cm².

(²) Malgré la faiblesse de ce courant moyen, les modifications de la cathode par les tops sont en général rapides. Le rapport $\frac{\text{temps actif}}{\text{période}}$, égal au produit : durée du top × fréquence, est très petit. On peut en conclure que l'image sera obligatoirement très peu lumineuse sur l'écran de l'oscillographe. Un dispositif qui sera décrit plus loin (variateur de brillance) nous permet d'éteindre le spot du tube cathodique pendant les intervalles des tops et de profiter de toute la luminosité que permet le tube pendant le tracé de la courbe.

enfin des courbes en double boucle; il y a, par exemple, d'abord saturation avec fatigue, puis, le

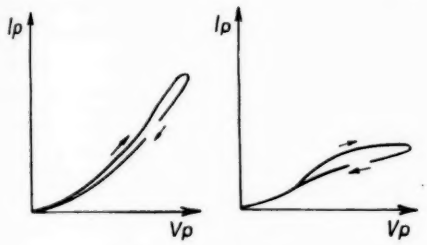


Fig. 2. — Fatigue.

a, presque en régime de charge spatiale.
b, en régime de « saturation ».

top se prolongeant, une activation apparaît, mais le trajet de retour repasse en dessous de celui

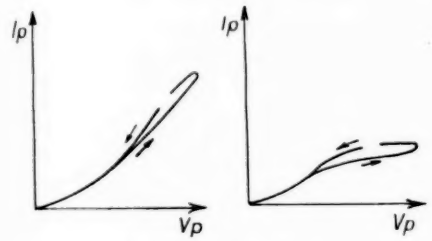


Fig. 3. — Activation.

a, presque en régime de charge spatiale.
b, en régime de « saturation ».

d'aller (*fig.* 4). Ces apparences montrent bien qu'il y a plusieurs phénomènes simultanés et que la modification constatée en est la résultante.

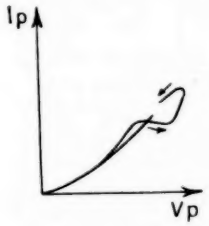


Fig. 4. — Courbes à double boucle.

Essais de durée et mesures successives.

La première mesure d'émission ne permet pas de se prononcer sur les qualités d'une cathode. En effet l'émission évolue en général rapidement pendant les premiers jours, puis de plus en plus lentement. Il faut donc suivre la lampe un certain temps dans son évolution.

Actuellement, nous voulons pouvoir étudier un grand nombre de facteurs et comme nous n'avons qu'un nombre limité de places sur notre bâti d'essai de durée, nous ne pouvons suivre chaque lampe que pendant 12 à 14 jours. C'est très suffisant pour être fixés sur les qualités originelles de la lampe. (Les lampes intéressantes seront ensuite étudiées en longue durée, lorsque nous en aurons la possibilité).

Après la première étude, nous soumettons donc la lampe à 3 ou 4 jours de durée à 800° C, sous une tension anodique (statique, alternatif ou pulsé) fixée pour demander à toutes les lampes suffisamment bonnes un débit de 50 mA/cm².

La lampe est alors pyrométrée à nouveau (les intensités nécessaires pour maintenir les filaments à température constante évoluent en effet parfois dans le temps, surtout dans le cas des alliages), puis soumise à une deuxième mesure d'émission, identique à la première (stabilisation de 45 mn à température de mesure, généralement 700° C, puis mesure en tops).

La lampe subit ensuite une durée de 3 ou 4 jours sous la même tension anodique, mais à 850° C. Le travail à 850° C amoindrit en général beaucoup les propriétés émissives et il est intéressant de voir comment les diverses cathodes supportent cette surchauffe. Cette période est suivie d'un ajustage pyrométrique (on en fait même en général plusieurs pendant la durée à 850°, pendant laquelle les modifications sont souvent notables), puis d'une mesure d'émission.

Enfin on remet la lampe en durée à 800°, sous la même tension anodique, pendant 3 à 4 jours, afin de voir si l'émission amoindrie par le travail à 850° remonte vers ses valeurs antérieures ou non. (Certaines bonnes lampes reprennent toutes leurs qualités, la plupart n'en reprennent qu'une partie, certaines ne remontent pas du tout.) Bien entendu, une mesure d'émission fait suite à la dernière période d'essai de durée. Tel est notre cycle actuel d'étude, donné à titre d'exemple et très susceptible de modifications selon le but qu'on se propose.

Nous allons maintenant décrire les appareils permettant l'application des méthodes ci-dessus exposées. Pour ne pas être trop longs, nous ne décrirons en détail que les dispositifs originaux et encore passerons-nous sous silence tout ce qui permet l'emploi commode des appareils : commutations diverses, enclenchements différés pour mise en marche automatique, etc.

APPAREILLAGE.

A. Diodes d'études.

Toutes les lampes que nous construisons répondent aux spécifications suivantes :

Les filaments (jusqu'à présent en nickel, de puretés diverses) ont un diamètre de 0,4 mm et une longueur libre de 75 mm. Le refroidissement n'étant pas le même aux deux extrémités, la région de température uniforme n'a pas son milieu confondu avec le milieu du filament. La partie recouverte d'oxydes a une longueur de 9 mm; elle est placée au milieu de la région à température uniforme. Pour une épaisseur d'oxydes de 50 μ, la surface émissive est de 1,4 mm².

Les anodes sont des cylindres minces de nickel, d'un diamètre intérieur de 5 mm et d'une hauteur de 25 mm.

Le filament occupe l'axe du cylindre et la partie émissive est située au milieu de la hauteur de l'anode. Un petit trou sert à la pyrométrie.

Les deux diodes d'une même lampe ont en commun une sortie filament. Les anodes sont sorties séparément. Le ballon est cylindrique allongé pour éloigner la fermeture des parties actives. Le pied est un pied pincé, la fermeture est une « fermeture coulée ».

B. Appareillage de pompage.

La seule chose particulière à signaler est le petit poste alimentant les quatre filaments en pompage (nous pompons habituellement deux lampes doubles à la fois). Basé sur le même principe que nos tableaux de formation et d'essais de durée décrits ci-après, il permet un réglage souple et stable de l'intensité dans chaque filament; mais les primaires des transformateurs individuels sont alimentés sur la sortie d'un alternostat, avec voltmètre; si bien qu'en vertu d'expériences préliminaires, si les filaments sont réglés à 850° pour une tension V_1, il suffira de monter le voltage à V_2, V_3, ..., pour porter les filaments à des températures voisines de 900, 950°, etc. On n'a plus qu'à corriger au pyromètre les faibles écarts individuels. Nous pouvons ainsi traiter rapidement et avec précision les quatre filaments *en même temps*, ce qui est nécessaire pour légitimer les comparaisons et éviter les empoisonnements des premiers par les derniers. Un dispositif spécial permet de traiter séparément les filaments pairs et les filaments impairs lorsque c'est la méthode de pompage qui est l'objet de l'étude.

C. Appareillage de formation et d'essais de durée.

Nous distinguerons trois parties : régulateur de tension, bâtis de distribution et de réglage, alimentations anodiques.

1° *Régulateur de tension.* — C'est un appareil à rhéostat mû par un servo-moteur commandé, par l'intermédiaire de relais, par un voltmètre à contacts. La régulation est obtenue à ± 1 % lorsque le réglage est bon (± 1,5 % en cas de déréglage). Elle n'est naturellement pas instantanée, mais cela a peu d'importance pour des essais de durée.

2° *Bâtis de distribution et de réglage.* — Devant l'impossibilité de réaliser des rhéostats parfaitement stables en très basses valeurs de résistance (à cause des résistances de contact, très variables) nous avons été contraints d'alimenter chaque filament par un petit transformateur spécial, les rhéostats de réglage étant placés dans le primaire. L'intensité est mesurée en intercalant dans le circuit secondaire, à l'aide d'un inverseur très soigné, un ampèremètre électromagnétique de précision. Une résistance égale à celle de l'ampèremètre lui est substituée en dehors des mesures. Le même ampèremètre sert ainsi à régler huit filaments. La correspondance de ces ampèremètres, à courant alternatif, avec les ampèremètres à courant continu du poste de pyrométrie et du poste de mesure d'émission a été déterminée à l'aide de mesures pyrométriques.

Des commutateurs permettent de relier chaque anode à l'un quelconque des générateurs de tensions anodiques et d'intercaler à volonté un milliampèremètre de mesure.

3° *Alimentations anodiques.* — Nous considérons comme intéressantes six tensions anodiques :

				mA : cm²
Statique	28 V	demandant à toute lampe suffisamment bonne un débit de...		50
»	38 V	»	»	100
Alternatif	43 V	»	»	50
»	60 V	»	»	100
Pulsé 1/5	76 V	»	»	50
»	120 V	»	»	100

Il serait bon de pouvoir disposer en permanence des six tensions à la fois, et c'est bien ce que nous avons l'intention de faire lorsque nous le pourrons. Actuellement, nous disposons en permanence des deux tensions alternatives (données par un transformateur alimenté sur la tension alternative régulée) et de deux des autres tensions (à condition que ce ne soient pas les deux pulsées à la fois). Nous avons

en effet construit deux générateurs, dont le premier peut fournir, l'une des deux tensions statiques, au choix et dont l'autre peut fournir, ou la statique 38 V, ou l'une des deux pulsées, au choix.

La particularité de ces montages est qu'ils sont très efficacement régulés, en sorte que ni les variations de tension d'alimentation, ni les variations de charge n'affectent leur tension de sortie. Nous donnerons d'abord le principe du générateur de tension régulée continue (statique), puis nous indiquerons le circuit de découpage permettant de transformer un tel générateur en générateur de tension régulée intermittente (pulsée).

a. Principe du générateur de tension régulée continue (*fig.* 5). — Le redressement de puissance donne, par rapport à la masse, une tension positive nettement plus élevée que la tension d'utilisation. Une lampe L_1 (constituée dans notre cas par six lampes EL 5 en parallèle) est intercalée entre le redressement et l'utilisation, l'utilisation étant dans sa cathode.

Une lampe L_2 (EF 6 par exemple), dont la grille présente par rapport à la cathode de L_1 une différence de potentiel *constante* (par des piles, ou, comme dans notre cas, par un ou plusieurs petits tubes au néon et potentiomètre) applique à la grille de L_1 la polarisation nécessaire pour que le débit de cette lampe soit tel que la tension aux bornes *utilisation* demeure sensiblement constante. L'amplification de L_2 étant très forte, la régulation ainsi obtenue est très bonne.

Le redressement négatif sert à maintenir allumés le ou les petits tubes au néon. La tension de sortie est réglée par le simple jeu du potentiomètre P.

Un tel appareil constitue une source de résistance interne extrêmement faible. La tension fournie est au moins aussi fixe que celle donnée par un éclateur au néon (stabilovolt); mais on a en plus l'inestimable avantage de pouvoir régler d'une manière continue la tension de sortie. (Dans notre cas, les stabilovolts n'auraient pu nous servir à rien.)

Dans le cas particulier où l'on désire obtenir de basses tensions régulées (notre cas), la différence de potentiel dont on dispose est insuffisante pour polariser L_1 lorsqu'on ne demande qu'un faible débit. Il y a donc lieu d'intercaler en α une batterie de piles (30 V environ), ou (comme nous l'avons fait) un petit redressement auxiliaire, dont le pôle négatif est tourné vers la grille de L_1.

Pour transformer un tel montage en un générateur de tension régulée intermittente, il suffit de lui adjoindre un circuit de découpage, connecté au point β.

b. Circuit de découpage (*fig.* 6). — Le fonctionnement du régulateur n'est pas changé. Pour obtenir le découpage, on bloque la lampe L_1 (*fig.* 5) pendant les intervalles de repos et on la débloque brusquement pendant un temps déterminé et réglable. Pendant la durée du top, la régulation joue absolument normalement. Le blocage de L_1 est obtenu grâce à la lampe L_3 (par exemple, une EL 3) qui débite tant qu'elle n'a pas de signal sur la grille (son potentiel de grille étant un peu plus élevé que celui de la cathode).

Le courant anodique de L_3 traversant R_1 produit une chute de tension suffisante pour rendre la grille de L_1 très négative par rapport à la ligne zéro. Pour obtenir les signaux, il faut donc bloquer L_3 en lui appliquant un signal rectangulaire négatif de grande amplitude et de durée réglable à volonté.

Ceci est obtenu grâce à L_4 (par exemple une EF 6) et à ses organes annexes. Cette lampe fonctionne comme une détectrice par condensateur shunté.

Alimentée par une tension alternative de grande amplitude (400 V), elle fournit des signaux rectangulaires négatifs.

La durée θ du signal est réglable entre deux limites (environ 1/2,5 T et 1/8 T) par le choix de R_s et le réglage de P_2).

On peut connaître avec précision θ/T si l'on mesure à l'aide d'un appareil à cadre mobile amorti la tension des signaux (il suffit pour cela de bloquer en permanence L_3) et la tension moyenne relevée quand le découpage fonctionne. Soient V et U ces deux tensions, on a

$$\frac{\theta}{T} = \frac{U}{V}.$$

La mesure de U se heurte à un écueil : pendant les intervalles de repos, la tension de sortie est légèrement négative (du fait du courant plaque de L_3), ce qui fausserait toute indication du voltmètre. On y remédie en mettant en série avec celui-ci une diode bien isolée et de résistance interne négligeable. On mesure ainsi ce que nous appelons le voltage utile moyen, qui est précisément :

$$U = V\frac{\theta}{T}.$$

Avec ce montage, $\frac{\theta}{T}$ est sensiblement indépendant de la fréquence du secteur.

D. Appareillage de mesure d'émission.

Avant d'entrer dans le détail des appareils, il nous faut donner le principe de notre générateur d'impulsions et du fonctionnement de l'ensemble.

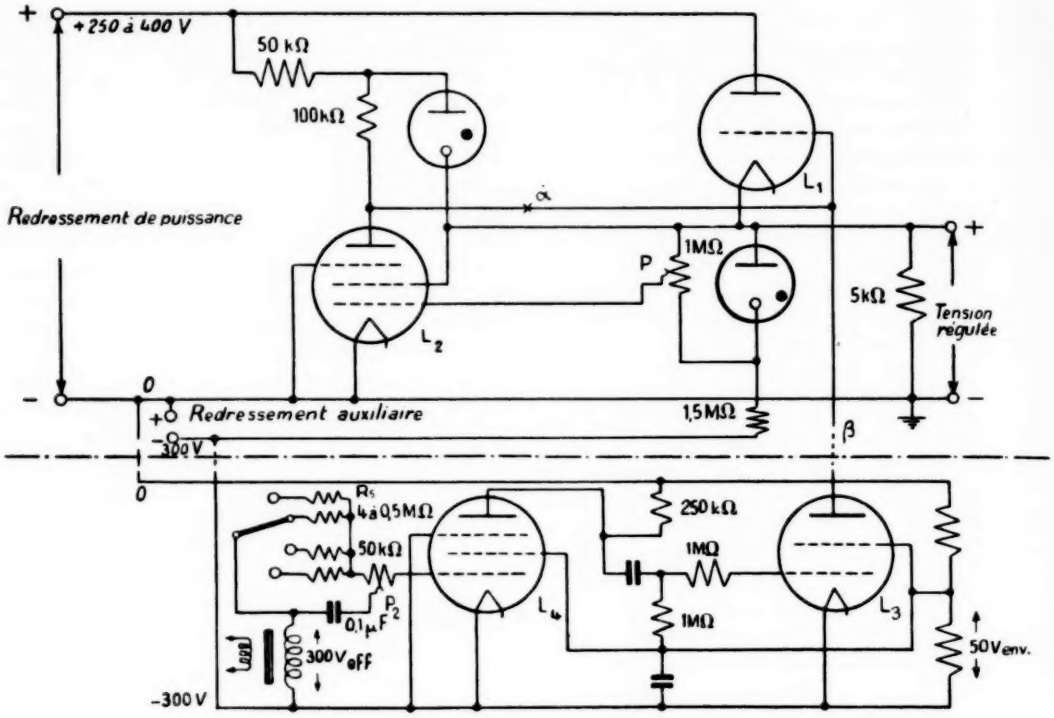


Fig. 5 et 6.

Fig. 5. — Principe du générateur de tension régulée continue.
Fig. 6. — Circuit de découpage (pour tension pulsée).

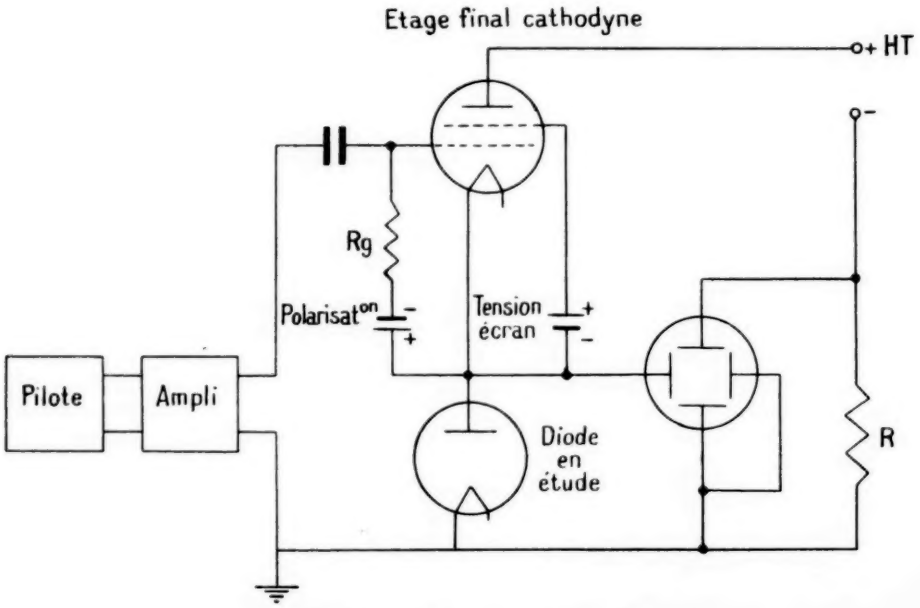


Fig. 7. — Principe du dispositif de mesure d'émission.

Le générateur d'impulsions comprend quatre parties : un *pilote* qui produit le signal ayant la forme, la durée et la fréquence voulues; un *amplificateur intermédiaire* qui donne à ce signal l'amplitude nécessaire; un *étage final*, qui, livrant plus ou moins passage au courant venant de la *haute tension*, applique l'impulsion sur la plaque de la diode en étude.

Cet ensemble est schématisé figure 7. Sur cette figure, afin de faire comprendre aisément le mode de fonctionnement de l'étage final, nous l'avons représenté comme si c'était un cathodyne normal; en réalité nous verrons plus loin que ce n'est pas un cathodyne normal, mais le mode de fonctionnement revient au même. La lampe finale est normalement polarisée juste au blocage. Le signal (positif) venant de l'amplificateur la fait débiter et l'on retrouve sur la charge insérée dans sa cathode (cette charge est ici la diode en étude) un signal identique à celui appliqué sur la grille (en supposant linéaire la caractéristique de la lampe finale), d'une amplitude un peu plus faible (la différence étant égale à la « dépolarisation » nécessaire pour provoquer le débit maximum), mais d'une intensité pouvant être aussi grande que le permet la lampe finale, alors que le signal d'attaque est « sans puissance » [1].

L'intensité traversant à chaque instant la diode en étude traverse aussi le retour de la haute tension vers la masse, donc la résistance R, aux bornes de laquelle on trouvera une différence de potentiel proportionnelle à cette intensité. Il suffira donc de connecter (directement, ou par l'intermédiaire d'un diviseur) une plaque Px de l'oscillographe à l'anode de la diode, une plaque Py au pôle négatif de la haute tension pour avoir directement le tracé de la caractéristique $I_p = f(V_p)$.

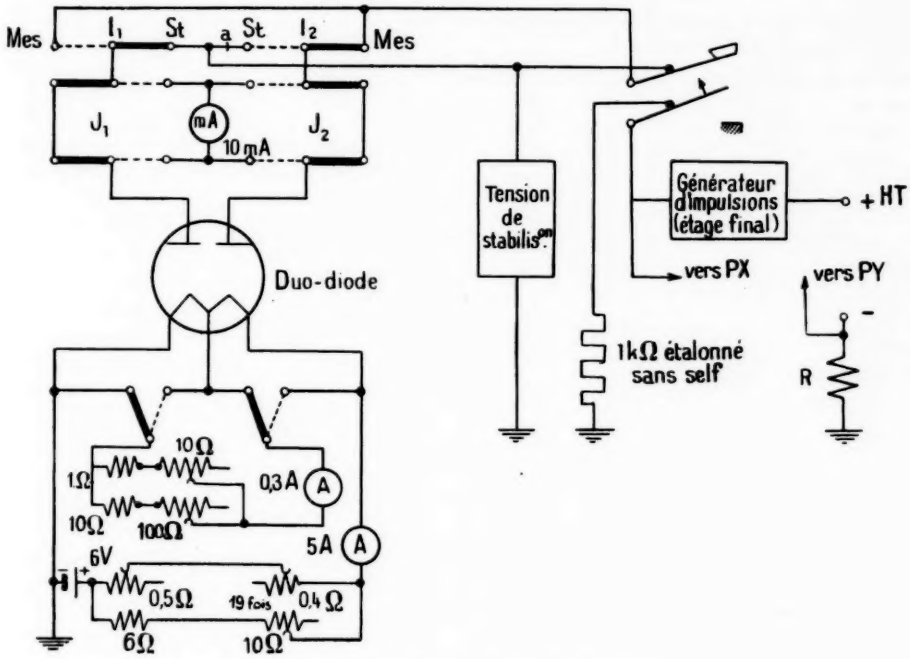


Fig. 8. — Branchement de la double diode.

Cette disposition extrêmement simple oblige à réduire les capacités, par rapport au sol, des alimentations (chauffage, écran et polarisation) de la lampe finale et la capacité par rapport au sol de la haute tension, sinon il apparaîtrait des déphasages entre la tension et l'intensité. Nous verrons plus loin quelles sont les limites en deçà desquelles cette condition peut être remplie d'une manière satisfaisante.

---

[1] Lorsqu'il s'agit de fournir des signaux supérieurs à plusieurs fois le blocage de la lampe finale, le montage cathodyne donne une reproduction de la forme des signaux bien meilleure que le montage normal.

Nous décrirons maintenant plus en détail chacune des parties de notre ensemble de mesure.

1° *Branchement de la double diode.* — Nous avons vu qu'une stabilisation devait précéder la mesure, le passage de l'une à l'autre étant très rapide; et également que cette stabilisation était effectuée simultanément sur les deux diodes d'une lampe. Nous obtenons ceci à l'aide du dispositif de la figure 8.

Pour la stabilisation simultanée des deux diodes d'une même lampe, les filaments sont chauffés en série afin que le passage commun n'ait pas à supporter la somme des intensités.

L'ensemble de rhéostats et d'ampèremètres figurés en dessous de la double diode permet de faire traverser chaque filament par l'intensité qui lui convient, malgré le montage en série. Les inverseurs I_1 et I_2 permettent de connecter chaque anode, soit au générateur pour stabilisation (statique, alternatif ou pulsé), soit au circuit de mesure [1].

Les inverseurs J_1 et J_2 permettent d'intercaler un milliampèremètre dans l'une ou l'autre anode.

Lorsqu'une des anodes est connectée, par la manœuvre de I_1 ou de I_2, au circuit de mesure, elle reste cependant en stabilisation tant qu'on n'appuie pas sur le manipulateur M.

Ce manipulateur multiple M constitue l'inverseur spécial permettant de réduire à une faible fraction de seconde l'intervalle entre la stabilisation et la mesure.

Tant qu'on n'appuie pas sur M, la diode reste en stabilisation et le générateur d'impulsions débite sur une résistance de 1000 Ω étalonnée, « sans self ». On peut ainsi faire tous les réglages préalables.

En appuyant sur M, on applique les impulsions sur la diode et l'on procède à la mesure. Dès que l'on cesse d'appuyer, la diode se retrouve en stabilisation. Les mesures peuvent ainsi être brèves et modifier très peu la cathode.

2° *Générateur d'impulsions.* — *a. Pilote* (*fig.* 9). — Il faut d'abord obtenir un phénomène périodique, de préférence brusque, à la fréquence que l'on désire; on doit pouvoir disposer d'une gamme de fréquences Cet office est rempli dans notre montage par un multivibrateur qui n'offre rien de bien particulier, sinon la polarisation positive réglable des grilles de commande (signalée par un Handbook américain), qui permet un réglage étendu de la fréquence et une grande stabilité de synchronisation. Cette synchronisation est faite par G_3 de la première lampe.

Un commutateur C*m* 1 permet, en choisissant les capacités de liaison et les polarisarions des grilles, de faire fonctionner l'appareil sur les fréquences : 10, 12,5, 16,66, 25, 50 et 100 par seconde. (Seules les fréquences en rapport entier avec celle du secteur conduisent à des images parfaitement nettes et stables, à moins de prendre un luxe inouï de précautions contre les résidus d'ondulation et les inductions).

Le potentiel de chaque anode monte assez brusquement et redescend très brusquement. C'est la chute brusque du potentiel de l'anode de la seconde lampe qui déclenche, à chaque période, le dispositif producteur de tops.

Le principe de la formation de nos tops demi-sinusoïdaux est le suivant : un condensateur est chargé, puis on cesse la charge et on décharge le condensateur à travers une self et un thyratron.

Les variations de la tension et du courant sont indiquées par la figure 10. Comme le courant ne peut s'inverser (à cause de la conductibilité unilatérale du thyratron), le phénomène s'arrête là et le condensateur demeure chargé en sens inverse de sa charge primitive, jusqu'à ce que le dispositif de charge le ramène à son état initial.

On voit que la courbe représentative de l'intensité traversant la self et le thyratron est exactement la courbe que nous désirions pour nos tops. Il suffit d'intercaler dans le circuit une faible résistance pour recueillir à ses bornes une différence de potentiel qu'on amplifiera ensuite.

Les selfs et condensateurs sont déterminés :

1° par la loi $T = 2\pi\sqrt{LC}$ ($T = 2$ fois la durée du top);

2° » $I_{max} = I_0\sqrt{\frac{C}{L}}$

(il ne faut, en effet, pas dépasser l'intensité maxima admissible pour le thyratron : 200 mA environ pour un type 884).

Cinq selfs et neuf condensateurs commutés par C*m*2 nous permettent d'obtenir des tops de durée : 30, 50, 70, 100, 140, 200, 280, 400, 560 μ sec).

C*m*2 commute également la résistance aux bornes de laquelle on prend la tension, afin d'avoir la même tension pour toutes les durées.

Le circuit de charge du condensateur est constitué par la lampe T_3, qui est bloquée pendant la

[1] Les deux cathodes étant décalées en potentiel de la tension de chauffage du premier filament (0,7 V environ), on intercale au point *a* un redressement très faible résistance interne réglé sur cette tension, afin d'égaliser les deux tensions anodiques de stabilisation. Cette compensation est inutile en mesure, vu l'amplitude des tops.

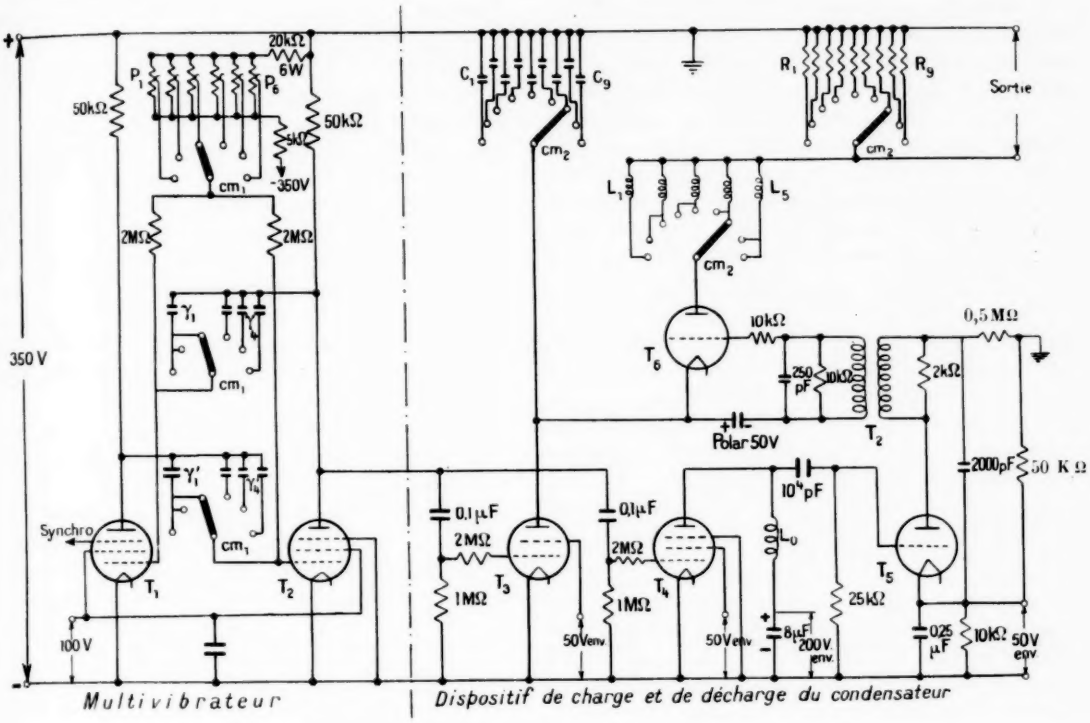


Fig. 9. — Générateur d'impulsions. Pilote.

Valeur des éléments :

T_1 et T_2, EF6; T_3, EL3; T_4, EF5; T_5 et T_6, thyratrons 884.

P_1 à P_6, 100000 ω.

$\gamma_1 = \gamma'_1 = 20000$ pF, $\gamma_2 = \gamma'_2 = 10000$ pF,
$\gamma_3 = \gamma'_3 = 5000$ », $\gamma_4 = \gamma'_4 = 2500$ ».

Tr, transformateur à air; 500-2000 t à faible capacité; ø moyen, 28 mm.

L_0, Self à air; 3500 t; ø moyen, 21 mm.
L_1, Self à fer divisé 0,018 Hy environ,
L_2, » 0,04 » ,
L_3, » 0,08 » ,
L_4, » 0,16 » ,
L_5, » 0,32 » .

$C_1 = 5000$ pF env., $C_4 = 12000$ pF env., $C_7 = 50000$ pF env.
$C_2 = 6000$ », $C_5 = 25000$ », $C_8 = 50000$ »
$C_3 = 12000$ », $C_6 = 25000$ », $C_9 = 100000$ »

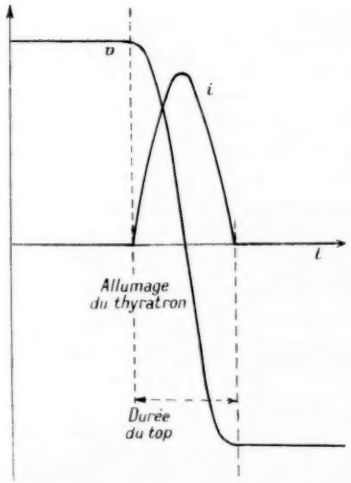


Fig. 10. — Décharge d'un condensateur à travers une self et un thyratron.

demi-période commençant à la chute du potentiel de l'anode de T_2 et qui charge le condensateur pendant l'autre demi-période.

Le thyratron de décharge T_6 est allumé par le dispositif formé par la pentode T_4 et le thyratron T_5 (la surtension dans L_0 au moment de l'annulation du courant plaque de T_4 allume T_5. La décharge de C_0 à travers T_5 allume T_6).

L'alimentation du pilote est faite en sorte que c'est le pôle + de la source anodique qui est au potentiel du sol; la tension engendrée aux bornes de la résistance peut ainsi être transmise à l'amplificateur par une liaison directe, sans transmettre les inévitables résidus d'ondulation mal filtrée.

b. Amplificateur intermédiaire (*fig.* 11). — L'amplificateur doit pouvoir fournir des signaux d'une amplitude au moins égale à celle des tops que l'on désire, sans grande distorsion. Nous avons préféré le montage à résistances-capacité, en raison de sa fidélité, bien qu'il nécessite une source anodique élevée. Pour obtenir la phase correcte, il nous fallait 1 étage ou 3 étages; 1 étage étant insuffisant, nous avons pris 3 étages. Les deux premiers étages n'amènent aucune distorsion appréciable et ne sont guère influencés par les capacités parasites, en raison de leurs faibles résistances d'anodes (5000 Ω). Il n'en est pas de même du troisième, dont la résistance d'anode est de 50 000 Ω (ce qui correspond déjà, pour une chute permanente de 1400 V dans cette résistance, à une puissance de 39 W). Aussi avons-nous soigné particulièrement le circuit anodique du dernier étage.

Deux potentiomètres montés en cascade permettent d'obtenir telle amplitude que l'on veut [1].

c. Etage final. — On pourrait attaquer par l'amplificateur intermédiaire un étage final cathodyne ordinaire tel que nous l'avons figuré dans le schéma de principe. Toutefois ce montage aurait l'inconvénient de fournir une tension de sortie dépendant du débit demandé. (Remarquons cependant que la variation de la tension de sortie avec la charge est beaucoup moins grande avec un cathodyne qu'avec un montage ordinaire, lorsqu'on doit délivrer des tensions supérieures à plusieurs fois le blocage de la lampe finale.)

Le montage que nous avons réalisé permet de reproduire sur un débit quelconque (jusqu'à une certaine limite) la forme et l'amplitude (à une très petite différence près) du signal « sans puissance » qu'on lui fournit (*fig.* 12). La lampe finale (formée dans notre cas de trois lampes P 17 en parallèle) est normalement polarisée au blocage par le débit de la lampe auxiliaire (EF 6). Tout signal positif appliqué à la cathode de la lampe auxiliaire tend à diminuer son débit anodique, donc à débloquer la lampe finale; le débit de la lampe finale fait croître le potentiel de sa cathode, et, par conséquent, celui de la grille de la lampe auxiliaire qui présente une différence de potentiel constante par rapport à la cathode de la lampe finale; ainsi à tout instant tout s'équilibre en sorte que la cathode de la lampe finale reproduise le signal appliqué à la cathode de la lampe auxiliaire, moins le supplément de polarisation de la lampe auxiliaire nécessaire pour provoquer le débit voulu de la lampe finale. La lampe auxiliaire donnant une grande amplification, 5 V sont plus que suffisants pour débloquer complètement l'étage final.

Le signal de sortie ne sera jamais supérieur à celui d'entrée, mais ne lui sera non plus jamais inférieur de plus de 5 V.

Il ne faut pas que ce signal d'entrée varie beaucoup suivant la demande de l'étage final. Ceci suppose que l'étage de sortie de l'amplificateur intermédiaire a une résistance interne suffisamment basse pour que l'attaque de la cathode de la lampe auxiliaire lui soit une charge négligeable. Avec les valeurs des éléments de notre montage, il n'en est pas ainsi et l'on obtiendrait certes une amélioration par rapport au cathodyne normal, mais non la régulation cherchée sans l'artifice de la contre-réaction. Celle-ci, à laquelle nous avons fixé un taux très élevé, diminue dans des proportions considérables la résistance interne du dernier étage de l'amplificateur intermédiaire. Afin de ne pas demander à cet étage, déjà un peu faible, la puissance de contre-réaction, nous prenons le départ de celle-ci à la sortie du cathodyne régulé. La régulation devient alors très satisfaisante, la tension varie de moins de 2 % lorsqu'on fait varier la charge de 10 000 à 500 Ω (Exemple : pour des tops de 500 V intensités maxima : 50 mA-1 A, $\Delta V < 10$ V). Comme nous avons généralement des variations d'intensité moins importantes, l'appareil remplit tout à fait nos desiderata à ce point de vue.

La capacité de l'ensemble de l'étage final par rapport au sol doit être aussi réduite que possible. Ce montage est alimenté par un transformateur à colonnes spécialement construit. Le montage est fait sur un châssis de bakélite, et non de métal.

Moyennent ces précautions, le fonctionnement est très satisfaisant tant que les diodes sont suffisamment émissives. Lorsque les diodes sont peu émissives, des déphasages se manifestent pour les durées les plus courtes des tops. Ainsi, nous ne pouvons utiliser avec sécurité toutes nos durées, jusqu'à 30 μsec, qu'avec de bonnes lampes. Avec des lampes cinq fois

[1] Afin de pouvoir travailler, lorsque nous voudrons faire des études comparables aux siennes, dans des conditions identiques à celles de Sproull, nous avons muni dès maintenant notre amplificateur d'un dispositif (non représenté sur le schéma) permettant d'obtenir à volonté des tops rectangulaires. Il suffit d'attaquer la première lampe par la totalité de la tension délivrée par le pilote, de polariser la deuxième lampe un peu plus qu'au blocage et enfin d'écrêter, par une diode à faible résistance interne et à bon isolement (EZ 4), dont la cathode est fixée au potentiel positif voulu, les signaux recueillis sur la plaque de la troisième lampe. L'amplitude se règle alors en faisant varier le potentiel de la cathode de la EZ 4 (il est nécessaire bien entendu, qu'un bon condensateur de plusieurs microfarads soit connecté entre cathode EZ 4 et masse).

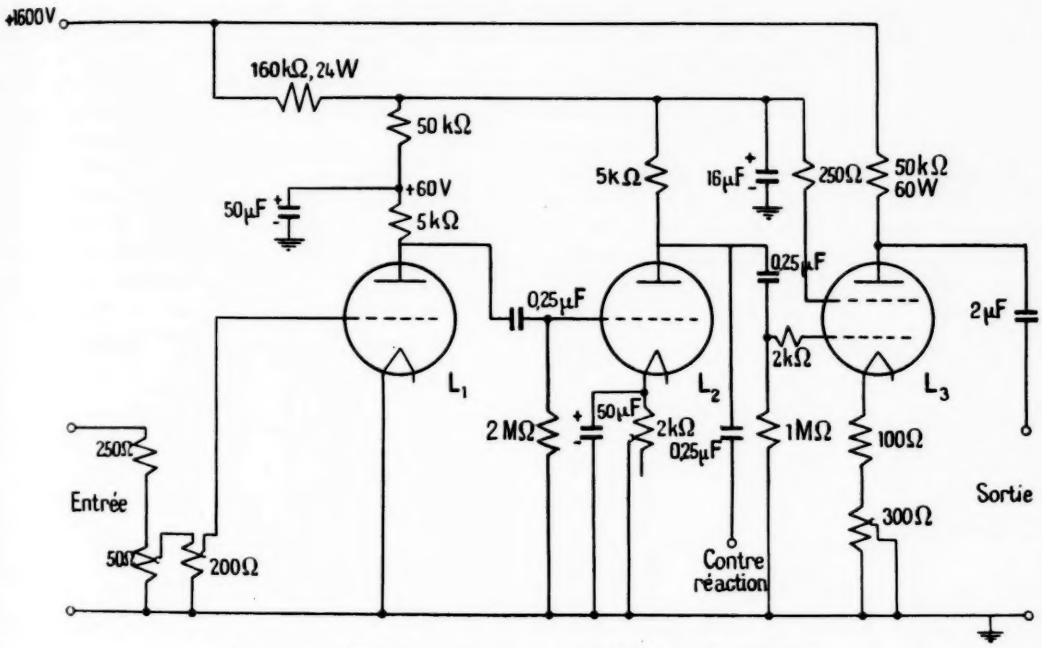


Fig. 11. — Générateur d'impulsions. Amplificateur intermédiaire.

$L_1 = L_2 = EBC_3$ $L_3 = EL_2$

Les courants anodiques des deux premières lampes sont réglés à 3 m/A au repos. Celui de la dernière à 28 m/A.

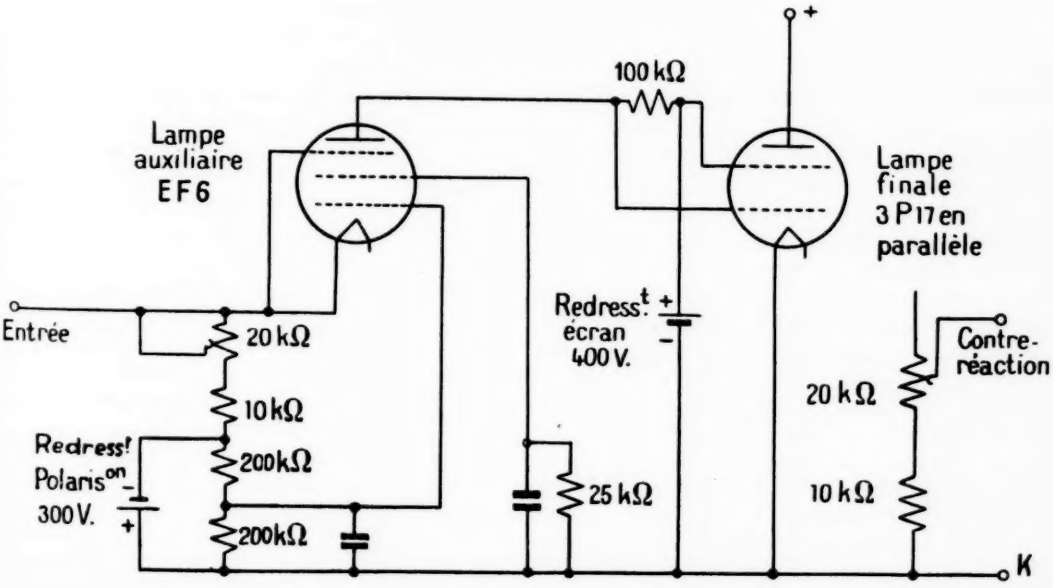


Fig. 12. — Générateur d'impulsions. Étage final.

moins émissives, un déphasage à peine perceptible se manifeste pour 100 μsec et devient sensible en dessous. Pour des lampes dix fois moins émissives (très mauvaises), le déphasage est à peine soupçonnable pour 200 μsec; il est perceptible à 100 μsec et net en dessous.

Cet inconvénient ne nous gêne nullement, car les très courtes et courtes durées ne sont utilisées qu'en tops de grande amplitude (1 000 V) sur des lampes qu'on ne peut, à cause de leur haute émission, étudier avec des tensions moindres, ou en tops de moyenne amplitude (500 V) sur des lampes sujettes aux étincelles (toujours de très bonnes lampes). Pour les lampes mauvaises ou très mauvaises, on peut toujours prendre des durées assez longues pour n'avoir jamais à craindre les déphasages.

Sans un artifice, à cause de la capacité de l'étage final, les tops deviendraient dissymétriques lorsque les lampes sont peu émissives, la capacité formant avec la résistance équivalente à la diode une constante de temps non négligeable qui allongerait la redescente du potentiel. Pour éviter ce défaut, il suffit de mettre en circuit la résistance figurée en pointillé sur le schéma [2000 Ω environ (*fig.* 1-3)].

La constante de temps de l'ensemble est ainsi ramenée à une valeur convenable et le courant traversant la résistance retourne directement à la haute tension, sans troubler en rien la mesure.

d. Haute tension. — Elle doit aussi avoir une faible capacité par rapport au sol.

Sa capacité de sortie de filtre doit être grande (4 μF) et au papier, afin de pouvoir fournir les intensités considérables des tops sans difficulté. Sa tension a été choisie de 1700 V environ.

3° *Branchement de l'oscillographe* (*fig.* 13). — L'oscillographe est un EV 311 C. d. C. fonctionnant sous 2000 V afin d'avoir la plus grande luminosité possible. Une plaque X et une plaque Y sont, ainsi que l'anode finale, mises à la masse. Les plaques actives sont choisies pour obtenir un système de coordonnées orienté normalement.

Deux sensibilités sont prévues pour X et pour Y (la totalité du déplacement utile correspond alors, soit à 600 V, soit à 1200 V; soit à 700 mA, soit à 1400 mA). L'oscillographe est étalonné au préalable; puis, faisant travailler le générateur d'impulsions sur une résistance étalonnée de 1000 Ω (sans self), et X étant sur la position la plus sensible (connexion directe), on ajuste les résistances Y de façon à donner aux droites tracées sur l'écran la pente exacte. Puis on passe X sur la position la moins sensible, et c'est alors le potentiomètre de X que l'on ajuste pour redonner aux droites les pentes exactes. Les quatre positions sont alors prêtes à l'emploi. Un condensateur ajustable γ sert à compenser les déphasages qui sont introduits par la grandeur des résistances du diviseur de tension de X.

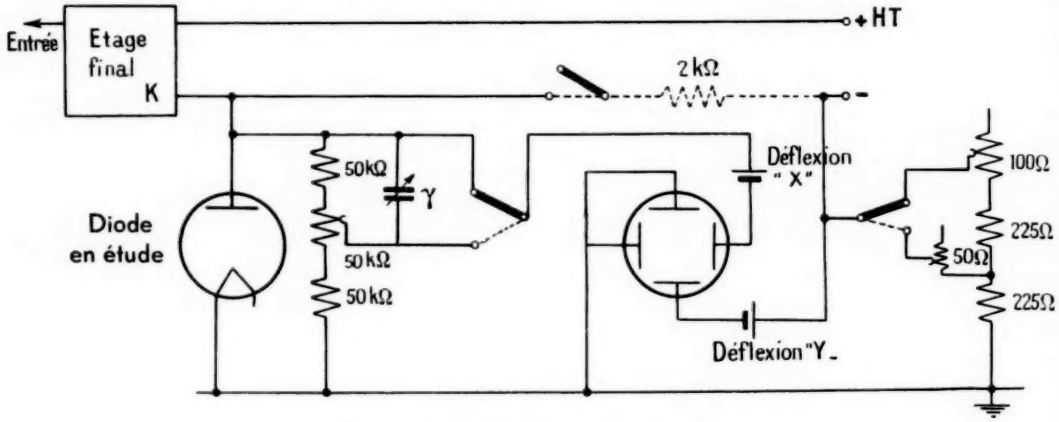


Fig. 13. — Branchement de l'oscillographe.

Afin d'utiliser la totalité des dimensions de l'écran, il est nécessaire de décaler le point de repos du spot. A première vue, il peut paraître séduisant d'utiliser pour ce décalage, la plaque « fixe » de chaque paire. Malheureusement, les potentiels moyens des ensembles ainsi réalisés, différents à l'origine, voient leur différence s'accroître constamment lors du tracé de la courbe et atteindre (pour le déflection maxima) une valeur triple de la valeur initiale. Il en résulte des effets de « lentilles cylindriques » qui enlèvent toute netteté à l'image. Au contraire, en

polarisant les plaques actives pour obtenir ce décalage, les potentiels moyens, qui présentent entre eux, à l'origine, la même différence que dans le cas précédent, voient, au cours du tracé de la courbe, leur différence diminuer d'abord, s'annuler si l'on passe par le centre de l'écran, puis croître à nouveau jusqu'à retrouver pour la déflection maxima, la même valeur absolue qu'au repos. La netteté est ainsi beaucoup moins altérée [1].

Pour polariser les plaques actives, on peut penser employer le montage série ou le montage parallèle (*fig.* 14).

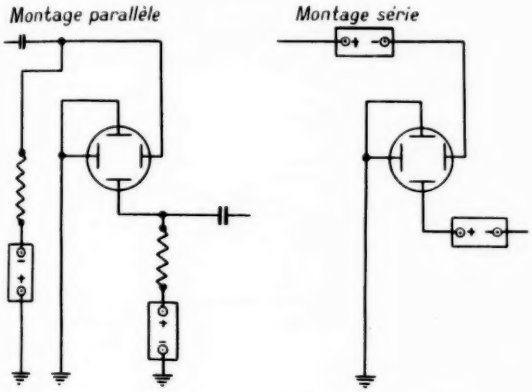


Fig. 14. — Polarisations de décalage de l'image.

Le montage parallèle, beaucoup plus facile à réaliser présente l'inconvénient que l'origine de la courbe se déplace sur l'écran lorsqu'on fait varier l'amplitude (inévitable, puisqu'avec la liaison par condensateur le potentiel moyen de la plaque active doit demeurer constant). Cet inconvénient, sans importance en observation qualitative, est, pour des mesures quantitatives, un vice redhibitoire. Nous avons donc été contraints à employer le montage série, plus difficile à réaliser, puisque les tensions de décalage doivent ne présenter par rapport au sol qu'une capacité très faible. Nous avons d'abord employé des piles; nous utilisons actuellement des petits redressements spéciaux à très faible capacité.

[1] Une attaque symétrique des plaques éliminerait tous ces phénomènes. Mais il faudrait passer par des amplificateurs symétriques *de mesure*, d'amplification parfaitement connue, sans distorsion ni déphasage. On aurait en outre tous les inconvénients des liaisons à capacité (*voir plus loin*). Il nous a semblé plus sage d'y renoncer, la netteté étant très acceptable et la distorsion trapézoïdale sans inconvénient, puisque l'on trace le quadrillage du fond du tube dans des conditions identiques à celles de l'utilisation.

4° *Variateur de brillance et discriminateur.* — Rappelons leur rôle qui a déjà été indiqué :

Le *variateur de brillance* permet de donner au spot du tube cathodique deux brillances différentes, l'une pendant les intervalles des tops, l'autre pendant les tops.

En effet, le tracé de la courbe, pendant les tops, demande la plus grande brillance que puisse donner le tube. A cette condition seulement, on peut utiliser les faibles rapports $\frac{\text{durée du top}}{\text{période}}$ qui nous sont par ailleurs nécessaires. Entre les tops, le spot demeure immobile. S'il conservait la même brillance, il éblouirait l'observateur et brûlerait très vite l'écran. Il était donc nécessaire de diminuer considérablement sa brillance pendant les intervalles des tops.

Le *discriminateur* permet de distinguer, sur une courbe en boucle, la branche de retour de celle d'aller et de discriminer, par suite, les phénomènes de fatigue de ceux d'activation.

Ces deux dispositifs forment un seul montage, au point de vue réalisation pratique, aussi les décrivons-nous ensemble, bien que leur fonctionnement soit tout à fait indépendant et qu'on puisse parfaitement réaliser l'un sans l'autre.

Le schéma de ce montage est représenté figure 15.

Le variateur est formé par les deux lampes L_1 et L_2, le discriminateur par les deux lampes L_3 et L_4. Ces quatre lampes sont de petites penthodes à pente fixe type EF 6.

Toutes les tensions négatives sont empruntées à l'alimentation du tube. Un petit redressement fournit la tension positive de 300 V.

Le Wenhelt du tube est relié aux plaques des lampes L_2 et L_4, ainsi qu'à une résistance R_1 qui rejoint un potentiomètre P_1.

a. Variateur. — Si L_2 et L_4 sont bloquées, le potentiel du Wenhelt sera le même que celui du curseur de P_1; ce potentiomètre permettra donc de régler la *brillance maxima* du spot. Voyons d'abord le fonctionnement du variateur, en supprimant par la pensée L_3 et L_4.

Le faible potentiel positif appliqué à la cathode de L_1 est suffisant pour la bloquer. Par contre, pendant le top (positif sur la plaque de la diode d'essai) la lampe est débloquée, ce qui correspond, sur sa plaque, à un signal rectangulaire négatif de 200 V d'amplitude environ.

Le condensateur C_1 transmet ce signal à la grille de L_2. La tension écran de L_2 est ajustée à l'aide du potentiomètre P_2 en sorte qu'en l'absence de

signal sur la grille, le courant anodique de L_2 produise dans R_1 une chute de tension amenant le Wenhelt au potentiel donnant au spot la brillance désirée pour les intervalles. On peut donc régler par P_2 la *brillance de repos*. Pendant le top, le signal rectangulaire négatif engendré par L_1 bloque L_2 et le Wenhelt prend alors le potentiel du curseur de P_1 (brillance maxima) pour revenir à sa brillance de repos aussitôt le top terminé. On peut régler les deux brillances à telle valeur que l'on veut, entre, l'extinction et le maximum absolu que peut donner le tube.

b. Discriminateur. — Voyons maintenant le fonctionnement du discriminateur, en supprimant par la pensée L_1 et L_2.

Le but a été de produire une variation très brève de la brillance du spot à un moment choisi pendant une des moitiés du top. Comme la brillance maxima est en pratique toujours réglée au maximum absolu que peut donner le tube, la seule variation possible était une diminution, ou, pour plus de netteté, une extinction. Ce signe étant « négatif », nous avons choisi de le placer sur la branche « descendante » de V_p, donc pendant la deuxième moitié du top.

Le point α suit les variations de potentiel de la plaque de la diode d'essai, à ceci près que son potentiel de repos est réglable à volonté par le potentiomètre P_3 et que l'amplitude de ses variations est réduite (*fig.* 16 *a*).

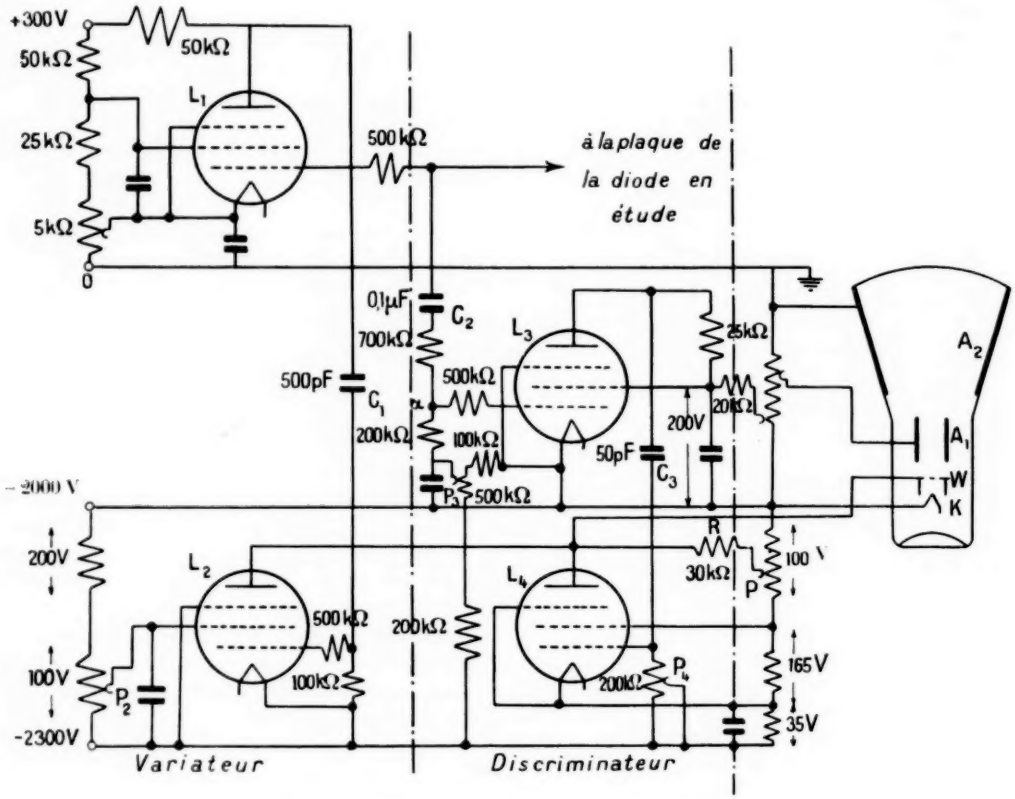


Fig. 15. — Variateur de brillance et discriminateur.

Ce potentiel de repos étant toujours plus négatif que le blocage, la lampe L_3 n'a de courant anodique que pendant les instants où le potentiel du point α dépasse algébriquement ce potentiel de blocage. La lampe étant totalement débloquée lorsque la grille aura atteint le potentiel de la cathode (qu'elle ne peut sensiblement dépasser, en raison de la résistance élevée insérée), le signal sur la plaque sera presque rigoureusement rectangulaire, d'amplitude constante (*fig.* 16 *b*). Mais la largeur de ce

signal dépendra de la hauteur à laquelle la ligne au potentiel de la cathode coupera la courbe représentative du potentiel du point α. Cette hauteur dépend du potentiel de repos réglé par P_3 et de l'amplitude du top. Les deux frontières du signal

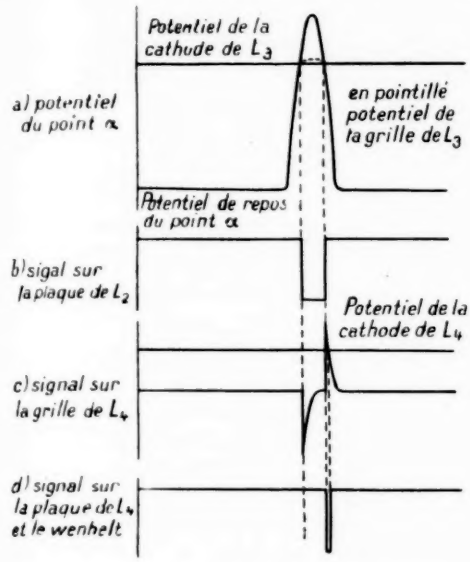


Fig. 16. — Fonctionnement du discriminateur.

rectangulaire se rapprocheront ou s'éloigneront du milieu du top selon que l'on augmentera ou diminuera la valeur absolue du potentiel de repos du point α. La deuxième frontière du signal, qui est une remontée du potentiel d'anode, pourra donc être placée à volonté à un moment quelconque de la deuxième moitié du top, selon le réglage de P_3.

Il nous suffit de l'utiliser pour produire l'extinction du tube. Pour cela, le signal engendré par L_3 est transmis à L_4 par un système capacité-résistance dont la constante de temps, réglable par P_4, est suffisamment petite (1 à 10 μsec). Le signal rectangulaire est transformé en deux signaux exponentiels, le premier négatif, le second positif (*fig.* 16 *c*). La lampe L_4 est polarisée (par la cathode) à trois ou quatre fois son blocage. Elle n'a donc aucun courant anodique au repos.

Le signal exponentiel négatif correspondant à la première frontière ne lui produit naturellement aucun effet ; mais le signal exponentiel positif correspondant à la deuxième frontière la débloque pendant une courte durée, qui dépend de la constante de temps de la liaison et de la grandeur du signal par rapport à la polarisation de la lampe. Pendant que la lampe est débloquée, elle débite dans R_1 et abaisse suffisamment le potentiel du Wenhelt pour éteindre le spot (*fig.* 16 *d*).

Le fonctionnement du discriminateur se superpose sans aucune difficulté à celui du variateur. Les résultats de l'un et de l'autre sont tout à fait satisfaisants. Le discriminateur produit une interruption du tracé dont on peut régler à volonté la position par P_3 et la longueur par P_4. Bien entendu, si l'on déplace l'interruption le long de la courbe, sa longueur ne demeure pas constante : c'est sa durée qui est constante (à très peu près) et la longueur de l'interruption est proportionnelle à la vitesse du spot.

Des exemples de courbes typiques ont été donnés plus haut (*fig.* 1 à 4).

***

Les résultats d'application des méthodes décrites seront fournis dans une deuxième note à paraître.

SUR LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS CARDINAUX DES MIROIRS ÉLECTRONIQUES

PAR ÉDOUARD REGENSTREIF.

SOMMAIRE. — *Après avoir rappelé brièvement le fonctionnement de la lentille électrostatique en miroir, l'auteur détermine les éléments cardinaux des miroirs électroniques et développe les calculs dans les deux cas d'un miroir divergent et d'un miroir convergent.*

Introduction.

La mise au point du microscope électronique a nécessité une étude détaillée des lentilles électroniques, tant électrostatiques que magnétiques. Un grand nombre de travaux ont été publiés à ce sujet et, à l'heure actuelle, la lentille électronique paraît connue sous bien des aspects.

Le miroir électronique, par contre, est resté à un degré de développement mineur. Cela tient, d'une part, au fait que le miroir électronique dérive directement de la lentille électrostatique dont l'étude était pendant un certain temps en retard sur le type magnétique, d'autre part à la relative complexité des problèmes que pose son emploi.

Malgré ces difficultés, la mise en œuvre du miroir électronique paraît intéressante dans plusieurs appareils d'optique électronique, notamment dans le cas du microscope électronique.

Un miroir de projection adapté sur un objectif électrostatique est actuellement à l'étude, au Laboratoire d'Optique Électronique de la Compagnie Générale de T. S. F. La détermination des éléments cardinaux de ce miroir forme l'objet de cet exposé.

Fonctionnement de la lentille électrostatique en miroir.

Considérons une lentille électrostatique indépendante (*fig.* 1), dont les électrodes extérieures sont portées au potentiel de l'anode, le disque central étant à un potentiel variable. Nous prendrons comme potentiel zéro celui de la cathode. La tension de la pièce centrale étant négative par rapport à la cathode, l'électron est soumis à des forces attractives au voisinage des électrodes extérieures et à des forces répulsives au voisinage de l'électrode centrale.

Appliquons au diaphragme des tensions négatives très fortes. Les forces répulsives deviennent tellement considérables que l'électron rebrousse chemin dès son entrée dans le système (trajectoire I, *fig.* 1). Le système fonctionne alors comme miroir divergent convexe. Si nous diminuons la tension (négative) de l'électrode centrale, l'électron peut pénétrer

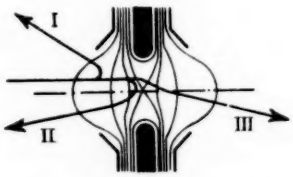


Fig. 1. — Lentille électrostatique indépendante fonctionnant en miroir.

plus profondément à l'intérieur de l'appareil et le système est capable de donner des images réelles; on a un miroir convergent concave (trajectoire II, *fig.* 1). Enfin, lorsque la tension de l'électrode centrale décroît encore en valeur absolue, en approchant de O par valeurs négatives, les électrons deviennent capables de traverser l'appareil. Cela se produit dès que la tension d'électrode n'est plus assez négative pour assurer une valeur négative du potentiel au centre du trou central. Le système fonctionne comme lentille convergente (trajectoire III, *fig.* 1). Le montage fonctionne encore comme lentille lorsque la tension du disque central devient positive par rapport à la cathode.

Trajectoires de Gauss dans la lentille et dans le miroir.

Pour déterminer les éléments cardinaux du système optique, il suffit de connaître la trajectoire d'un électron initialement parallèle à l'axe. Dans l'approximation de Gauss, la trajectoire de l'électron $r = r(z)$ est donnée par l'équation différentielle :

$$r'' = -\frac{\Phi'}{2\Phi} r' - \frac{\Phi''}{4\Phi} r, \tag{1}$$

à laquelle on peut donner une forme très commode pour le cas des lentilles :

$$R'' = -\frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 R, \tag{2}$$

par le changement de variable : $R = r.\Phi^{1/4}$.

Dans ces équations, $\Phi(z)$ représente la distribution du potentiel le long de l'axe du système.

Or, il n'est pas possible de donner à la quantité Φ une expression analytique simple en fonction des coordonnées du système. Aussi a-t-on le plus souvent recours à sa détermination à l'aide de la cuve électrolytique. Une fois en possession de la distribution de potentiel, l'intégration numérique de l'équation (1) ou (2) permet de trouver la trajectoire de l'électron et par conséquent les éléments cardinaux du système optique. C'est de cette manière que Henri Bruck [1] a étudié la lentille électrostatique en fonction de ses paramètres géométriques : diamètre du diaphragme central, distance des électrodes, etc.

Dans le cas du miroir, il se présente tout de suite une difficulté; en effet, au point de réflexion, r' devient infini et les équations (1) et (2) donnant les trajectoires de l'électron dans l'approximation de Gauss cessent d'être valables.

On peut tourner la difficulté en intégrant l'équation (1) par exemple jusqu'à un certain point au voisinage du point de réflexion (*fig.* 2) et admettre

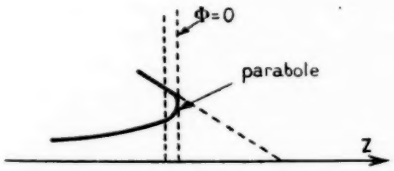


Fig. 2.

ensuite qu'au voisinage immédiat de ce point, le champ est uniforme. On remplace alors, dans la région considérée, la trajectoire de l'électron par un arc de parabole auquel on joint la deuxième partie de la courbe obtenue en reprenant l'intégration de l'équation (1) (*fig.* 2).

On peut aussi appliquer une autre méthode. En effet, les difficultés dans la détermination des trajectoires électroniques proviennent du fait que l'équation différentielle mise en œuvre est écrite sous la forme résolue $r' = F(z, r)$ en r et se prête donc mal à l'étude au voisinage de la valeur $r' = \infty$ qui correspond à $r = r_l$.

Ces difficultés disparaissent si l'on emploie une représentation paramétrique $r = f(p)$, $z = g(p)$. Le paramètre qui s'introduit d'une manière toute naturelle est le temps.

Écrivons directement les équations du mouvement de l'électron dans un plan méridien :

$$\begin{cases} m\ddot{r} = e\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) = e\varphi. \end{cases} \tag{3}$$

En prenant comme unité de temps la quantité $\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$, ces équations s'écrivent dans l'approximation de Gauss :

$$\begin{cases} \dot{z} = \Phi^{\frac{1}{2}}, \\ \ddot{r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = -\dfrac{r}{4}\Phi''. \end{cases} \tag{4}$$

le point indiquant une dérivation par rapport au temps, la virgule une dérivation par rapport à z.

Soient z_l l'abscisse du point de réflexion, t_l la valeur du paramètre temps en ce point et z_0 la valeur de z pour $t = 0$. Le système (4) donne alors immédiatement :

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\Phi^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{pour} \quad t < t_l. \tag{5}$$

$$t_l - t = \pm\int_{z}^{z_l} \frac{dz}{[\Phi'_l(z - z_l)]^{\frac{1}{2}}} = \pm 2\left[\frac{z - z_l}{\Phi'_l}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

au voisinage de $t = t_l$,

$$t = 2t_l - t(z) \qquad \text{pour} \quad t > t_l. \tag{7}$$

$t(z)$ étant la valeur de l'intégrale (5).

Une fois $t(z)$ et par conséquent $z(t)$ connus, on peut exprimer $\Phi''(z)$ sous la forme $\Phi''(t)$ et l'intégration de la seconde équation du système (4) donne $r = r(t)$. La trajectoire est complètement déterminée par $r = r(t)$, $z = z(t)$.

C'est ce dernier procédé qui nous a servi à déterminer les éléments cardinaux d'une lentille électrostatique indépendante fonctionnant comme miroir électronique.

Il est à remarquer que les deux méthodes esquissées ci-dessus ne sont valables que lorsque $\Phi'_i = 0$. Dans le cas où le point de réflexion est situé dans une région où la dérivée du potentiel tend vers zéro (ce cas se présente par exemple dans une lentille électrostatique indépendante lorsque la tension négative du diaphragme central est juste assez forte pour faire coïncider la surface réfléchissante avec le plan de symétrie de la lentille), les trajectoires des électrons deviennent très compliquées. Ce cas ne semble pas présenter d'intérêt pour la formation des images car, au voisinage du point $\Phi'_i = 0$, les aberrations deviennent très grandes. Par contre, il est intéressant pour les lampes électroniques, car on dispose alors d'un moyen commode d'agir sur le courant électronique par variation de la tension appliquée au diaphragme central. Recknagel [2] qui a étudié ce cas, a montré que l'électron exécute une série d'oscillations au voisinage du point $\Phi' = 0$, le nombre des oscillations allant en croissant lorsque la distance du point de réflexion au point $\Phi' = 0$ diminue.

Détermination des éléments cardinaux du miroir électronique obtenu à partir de la lentille électrostatique.

Nous sommes partis de la lentille électrostatique indépendante décrite par H. Bruck [1] et représentée dans le schéma (*fig.* 3). Le potentiel de l'espace et celui des électrodes extérieures est fixé arbitrairement à + 100 V (on sait que les trajectoires électroniques sont invariantes pour un changement proportionnel des potentiels), le potentiel de la cathode est de 0 V, celui de l'électrode centrale est variable. La distribution du potentiel sur l'axe,

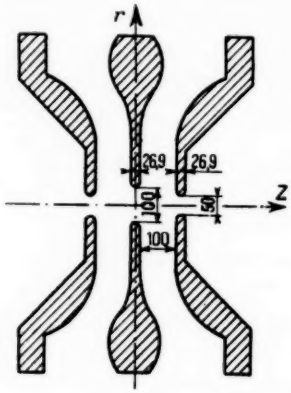


Fig. 3. — Lentille de Henri Bruck.

déterminée à la cuve électrolytique, est représentée en pour 100 sur la figure 4.

Soit $\overline{U_M}$ la différence de potentiel entre le point de l'axe $z = 0$ et un point quelconque de l'axe situé à l'extérieur des électrodes (*fig.* 3). Soit par ailleurs U_A la différence de potentiel anode-cathode. Le paramètre déterminant le fonctionnement du système est la quantité :

$$\rho = \frac{\overline{U_M}}{U_A}.$$

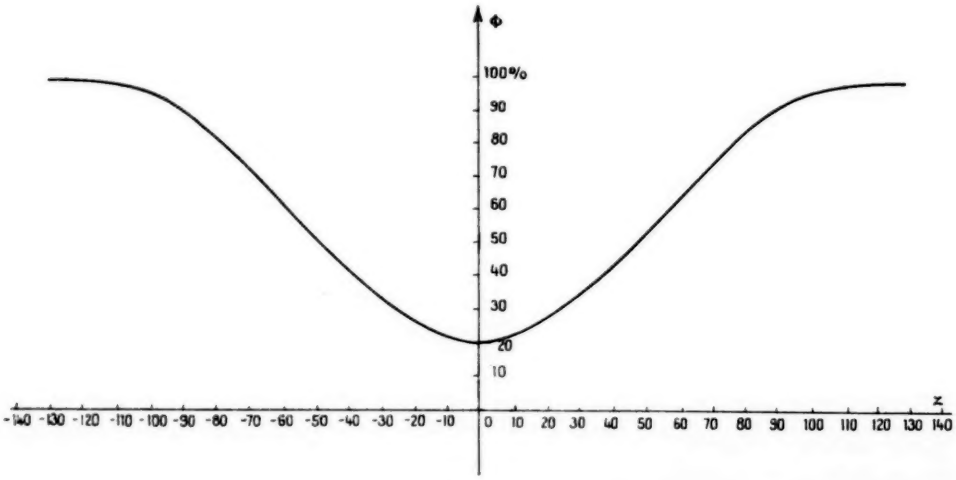


Fig. 4. — Distribution des potentiels dans la lentille électrostatique indépendante. Potentiels en pour 100, abscisses en millimètres.

On pourrait introduire aussi le rapport :

$$\rho' = \frac{U_M}{U_A},$$

U_M étant la différence de potentiel entre électrodes. La première notation a l'avantage de ne pas introduire les éléments géométriques de l'appareil. On passe du reste de ρ à ρ' en multipliant par un facteur qui dépend uniquement des constantes géométriques du système.

La figure 5 montre la variation de la distance focale en fonction du paramètre. Pour $\rho > -1$, l'appareil fonctionne en lentille. Pour $\rho < -1$,

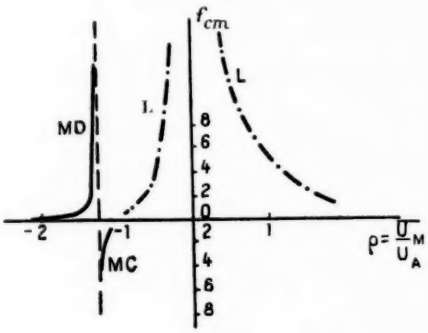


Fig. 5.

nous avons à faire à un miroir. La droite $\rho = \rho_p$ sépare la région des miroirs convexes ($f > 0$) de celle des miroirs convergents ($f < 0$). Pour $\rho = \rho_p$, le système est afocal. Pour $\rho = -1$ la courbe n'est pas définie, la distance focale présentant une allure oscillatoire comme nous l'avons indiqué plus haut.

Comme dans le cas de la lentille, on peut faire varier la distance focale du miroir en agissant sur le rapport $\rho = \frac{U_M}{U_A}$, c'est-à-dire pratiquement sur la tension appliquée à l'électrode centrale. On voit que dans la région utile du miroir une faible variation de cette tension entraîne une variation relativement grande de la distance focale.

Nous allons montrer maintenant comment nous avons déterminé les deux points de la courbe :

$$\rho = \frac{U_M}{U_A} = -1,2 \quad \text{(miroir convergent)}$$

et

$$\rho = \frac{U_M}{U_A} = -1,5 \quad \text{(miroir divergent)}.$$

A partir de la courbe Φ donnant la distribution du potentiel le long de l'axe (*fig.* 4), on construit la courbe $\Phi_{-1,2}$ correspondant à $\rho = -1,2$. Il suffit pour cela de se donner les valeurs extrêmes de la tension : $+100$ V pour l'espace extérieur et -20 V pour le point $z = 0$, et d'interpoler suivant la figure 4. On construit ensuite les courbes Φ', Φ'', $\Phi^{-1/2}$, $t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\Phi^{\frac{1}{2}}}$ et $\Phi''(z) = \Phi''(t)$. Nous avons maintenant tous les éléments pour intégrer l'équation différentielle

$$\ddot{r}(t) = -\frac{r(t)}{4}\Phi''(t).$$

Nous avons intégré numériquement cette équation en appliquant la méthode de Störmer-Adams [3], [4], sur la suggestion de M. Pierre Grivet, qui a remarqué que la méthode était particulièrement bien adaptée au calcul des trajectoires fondamentales de Gauss. Dans ce cas, en effet, la partie difficile des calculs, le commencement, disparaît, car on sait que les rayons principaux loin de la lentille sont des droites parallèles à l'axe; on connaît le début des courbes intégrales. La méthode garde son avantage propre : les calculs sont très rapides et même en prenant seulement les différences secondes, la précision est largement suffisante pour les besoins de la pratique.

On constate en effet en comparant le procédé de Störmer à la méthode classique d'Euler (*voir* Tableaux V et VI) que la contribution des différences secondes est inférieure au dernier chiffre conservé dans les valeurs de r. L'erreur commise en négligeant les différences troisièmes est donc certainement inférieure à une unité du dernier chiffre conservé dans les résultats. La méthode adoptée conduit tout naturellement à calculer un nombre assez grand de points au voisinage du point de réflexion qui constitue la région la plus délicate et à espacer ensuite les intervalles au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers l'infini (*fig.* 8 et 11).

Les tableaux I et II et les courbes des figures 6, 7, 8 sont relatifs au miroir $\rho = -1,2$, les tableaux III et IV et les courbes des figures 9, 10, 11 montrent le calcul du miroir $\rho = -1,5$. Les trajectoires électroniques trouvées sont représentées sur les figures 8 et 11. Pour trouver le plan principal (sommet du miroir) il suffit de prendre l'intersection du prolongement du rayon parallèlement incident avec la tangente au rayon émergent. L'intersection de cette tangente avec l'axe des z donne également la distance focale du miroir. On trouve avec les données qui sont à la base de ce calcul :

$\rho = -1,5$ miroir divergent, distance focale $f = +\ 9,7$ mm,
$\rho = -1,2$ » convergent, » $f = -183,7$ mm.

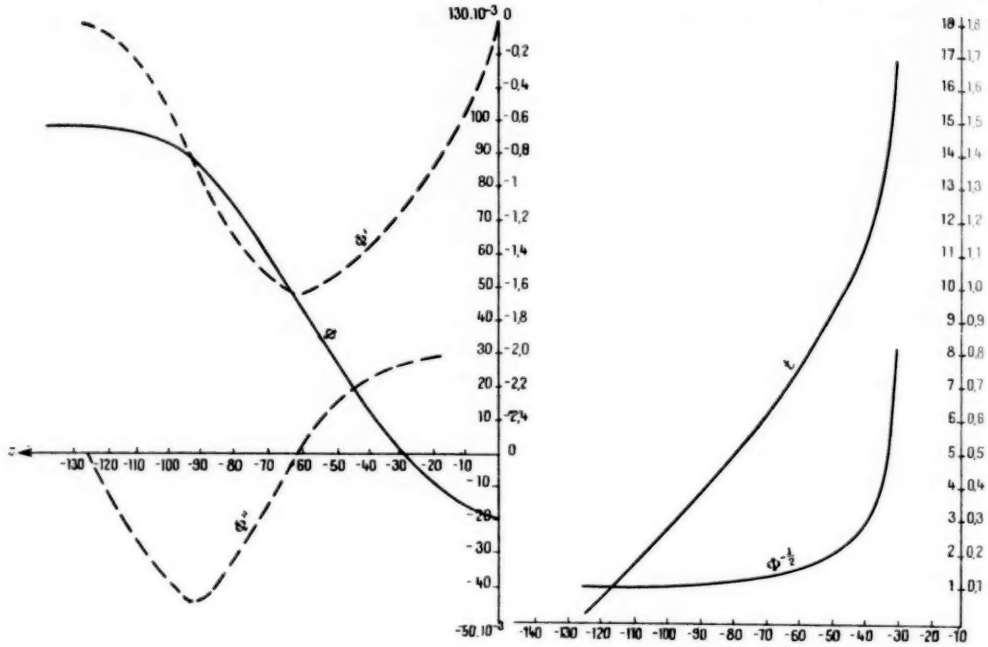


Fig. 6. — Miroir convergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,2$.

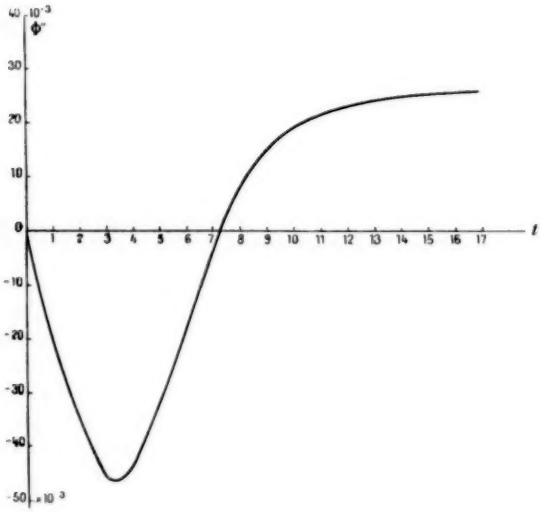


Fig. 7. — Miroir convergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,2$.

Le rapport d'homothétie entre le système calculé et l'appareil pratiquement réalisé au laboratoire est de 30. Les distances focales des deux miroirs envisagés devraient donc être respectivement + 0,3 mm et — 6,1 mm. Les mesures que nous comptons faire sur l'appareil permettront de contrôler ces résultats.

La méthode exposée permet évidemment de déterminer tous les points de la courbe des distances focales (*fig.* 5), à l'exception de la région située au voisinage immédiat du point $\rho = -1$.

Résumé.

En faisant varier la tension appliquée à l'électrode centrale d'une lentille électrostatique indépendante, on peut faire fonctionner celle-ci en miroir électronique. En mettant les équations du mouvement de l'électron sous forme paramétrique et en appliquant le procédé de Störmer-Adams à la résolution numérique des équations différentielles ainsi obtenues, on peut déterminer commodément les éléments cardinaux des miroirs électroniques. Les détails du calcul sont exposés sur deux exemples, un miroir divergent et un miroir convergent. Ces calculs serviront à l'étude d'un miroir de projection adapté à un objectif de microscope électronique.

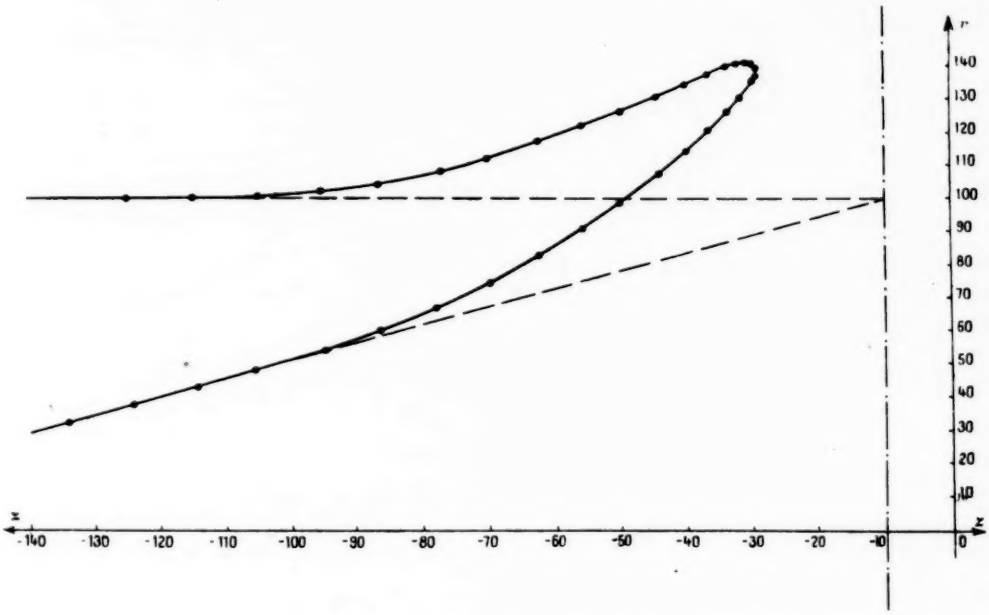


Fig. 8. — Miroir convergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,2$. Trajectoire d'un électron initialement parallèle à l'axe. Position du plan principal $Z = -10$ mm; distance focale $f = -183,7$ mm.

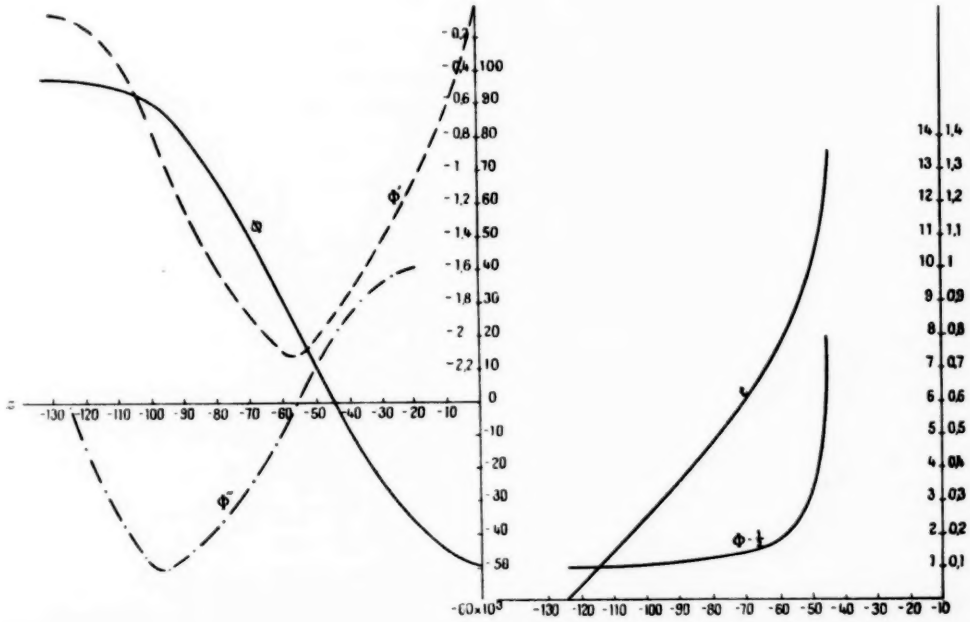


Fig. 9. — Miroir divergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,5$.

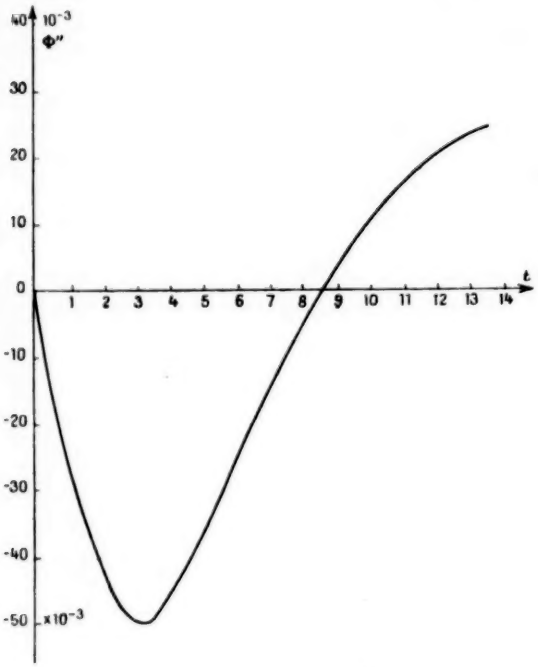


Fig. 10. — Miroir divergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,5$.

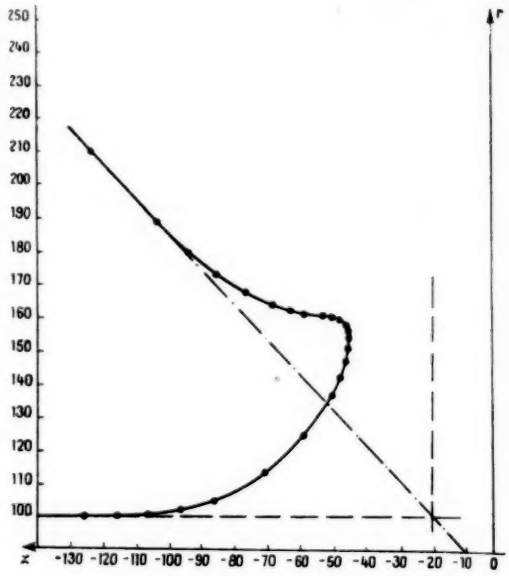


Fig. 11. — Miroir divergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,5$. Trajectoire d'un électron initialement parallèle à l'axe. Position du plan principal $Z = -19$ mm; distance focale $f = +9,7$ mm.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Henri Bruck, *Sur les propriétés de quelques lentilles électrostatiques indépendantes* (*Cahiers de Physique*, octobre 1944).

2. Recknagel, dans Busch et Brüche, *Beiträge zur Elektronenoptik*, Leipzig, 1937.

3. Störmer, *Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires* (*Congrès international des Mathém.*, Strasbourg, 22-30 septembre 1920, p. 244).

4. Kryloff, *Sur l'intégration numérique des équations différentielles* [Extraits du *Mémorial de l'Artillerie française*, 6, 1927 (2 fascicules), p. 353-423].

Tableau I.

Miroir convergent $\rho = \frac{U_m}{U_A} = -1,2$.

Potentiel sur l'axe au point $z = 0$; $V_m = -20$ V.
Potentiel de l'électrode centrale $V_c = -50$ V.

z.	Φ.	$\Phi_{-1,2}$.	$\Phi_{-1,2}^{-\frac{1}{2}}$.	t.	t.
—125.....	98,7	98	0	1,01	33,88
—115.....	98,3	97,5	0,101	1,01	32,87
—105.....	97,0	95,4	0,102	2,03	31,85
— 95.....	93,5	90,2	0,105	3,07	30,81
— 85.....	87,0	80,5	0,111	4,15	29,73
— 75.....	78	67,0	0,122	5,32	28,66
— 65.....	68,7	53,1	0,137	6,61	27,27
— 55.....	57,7	36,5	0,166	8,10	25,78
— 45.....	47,6	21,4	0,232	9,96	23,92
— 35.....	38,3	7,4	0,368	12,60	21,28
			0,817	(*)	(*)
— 25.....	30,4	— 4,4			
— 15.....	24,4	—13,4			
— 5.....	21,0	—18,5			
0.....	20	—20			

(*) $t = 16,94$ au point de rebroussement.

Tableau II.

Miroir convergent $\rho = \frac{\overline{U_m}}{U_A} = -1,2.$ *Intégration de l'équation* $\ddot{r}(t) = -\frac{r(t)}{4}\Phi''(t).$

Procédé de Störmer-Adams.

t.	Φ''.	r.	Δr.	$\Delta^2 r$.	ξ.	$\Delta\xi$.	$\Delta^2\xi$.	z.
0	−0,001	100			0,025			−125
			0,080			0,426		
1	−0,018	100		0,442	0,451		−0,098	−115
			0,522			0,328		
2	−0,031	100,5		0,770	0,779		+0,038	−105,2
			1,292			0,366		
3	−0,045	101,8		1,148	1,145		−0,391	− 95,5
			2,440			−0,025		
4	−0,043	104,2		1,187	1,120		−0,287	− 86,7
			3,627			−0,312		
5	−0,030	107,8		0,784	0,808		−0,018	− 77,8
			4,411			−0,330		
6	−0,017	112,2		0,476	0,478		−0,031	− 70,0
			4,887			−0,361		
7	−0,004	117,1		0,114	0,117		−0,031	− 62,5
			5,001			−0,392		
8	+0,009	122,1		−0,278	−0,275		+0,191	− 56,0
			4,723			−0,201		
9	+0,015	126,8		−0,460	−0,476		0,054	− 50,0
			4,263			−0,147		
10	0,019	131,0		−0,618	−0,623		0,030	− 44,8
			3,645			−0,117		
11	0,022	134,6		−0,737	−0,740		0,066	− 40,5
			2,908			−0,051		
12	0,023	137,5		−0,785	−0,791		0,004	− 37,0
			2,123			−0,047		
13	0,024	139,6		−0,838	−0,838		0,005	− 34,3
			1,285			−0,042		
14	0,025	140,9		−0,880	−0,880		0,039	− 32,2
			0,405			−0,003		
15	0,025	141,3		−0,880	−0,883		−0,029	− 30,5
			−0,485			−0,032		
16	0,026	140,8		−0,913	−0,915		0,041	− 29,5
			−1,398			0,009		
17	0,026	139,4		−0,903	−0,906		0,006	− 29,2
			−2,302			0,015		
18	0,026	137,1		−0,890	−0,891		0,035	− 29,5
			−3,192			0,055		
19	0,025	133,9		−0,833	−0,836		0,030	− 30,5
			−4,025			0,025		
20	0,025	129,9		−0,814	−0,811		0,036	− 32,2
			−4,839			0,061		
21	0,024	125,1		−0,747	−0,750		0,002	− 34,3
			−5,586			0,063		
22	0,023	119,5		−0,687	−0,687		0,002	− 37,0
			−6,273			0,065		
23	0,022	113,2		−0,622	−0,622		0,052	− 40,5
			−6,895			0,117		
24	0,019	106,3		−0,501	−0,505		0,113	− 44,8
			−7,396			0,230		
25	0,015	98,9		−0,366	−0,375		−0,060	− 50
			−7,762			0,170		
26	0,009	91,1		−0,210	−0,205		+0,118	− 56
			−7,972			0,288		
27	−0,004	83,0		+0,092	+0,083		−0,052	− 62,5
			−7,880			0,236		
28	−0,017	75,1		0,315	0,319		−0,049	− 70
			−7,565			0,187		
29	−0,030	67,5		0,502	0,506		−0,042	− 77,8
			−7,063			0,145		
30	−0,043	60,5		0,647	0,651		−0,188	− 86,7
			−6,416			−0,043		
31	−0,045	57,1		0,592	0,608		−0,190	− 95,5
			−5,824			−0,233		
32	−0,031	48,3		0,359	0,375		+0,051	−105,2
			−5,465			−0,182		
33	−0,018	42,8		0,197	0,193		−0,002	−115
			−5,268			−0,184		
34	−0,001	37,5		0,09	0,009			−125
			−5,259					
35		32,2						

Tableau III.

Miroir divergent $\rho = \frac{\overline{U_m}}{\overline{U_t}} = -1,5$. *Potentiel sur l'axe au point* $z = 0$; $V_m = -50$ V.

Potentiel de l'électrode centrale $V_c = -87,5$ V.

z.	Φ.	$\Phi_{-1,5}$.	$\Phi^{-\frac{1}{2}}_{-1,5}$.	t.	t.	z.	Φ.	$\Phi_{-1,5}$.	$\Phi^{-\frac{1}{2}}_{-1,5}$.	t.	t.
−125.....	98,7	97,5	0,101	0	27,16	− 55.....	57,7	20,7	0,220	8,53	18,63
−115.....	98,3	96,6	0,102	1,01	26,15				0,324		
−105.....	97,0	94,3	0,103	2,03	25,13	− 45.....	47,6	1,7	0,768	12,21	14,95
− 95.....	93,5	87,7	0,107	3,08	24,08	− 35.....	38,3	−15,7		(*)	(*)
− 85.....	87,0	75,5	0,115	4,19	22,97	− 25.....	30,4	−30,5			
− 75.....	78	58,6	0,131	6,31	21,85	− 15.....	24,4	−41,7			
− 65.....	68,7	41,2	0,156	6,73	20,43	− 5.....	21,0	−48,1			
						0.....	20	−50			

(*) $t = 13.58$ au point de rebroussement.

Tableau IV.

Miroir divergent $\rho = \frac{\overline{U_m}}{\overline{U_t}} = -1,5$. *Intégration de l'équation* $\ddot{r}(t) = \frac{r(t)}{4}\Phi^{\prime\prime}(t)$.

Procédé de Störmer-Adams.

t.	Φ''.	n.	Δn.	$\Delta^2 n$.	ξ.	$\Delta\xi$.	$\Delta^2\xi$.	z.
0.....	0	100						−125
1.....	−0,025	100			0,625			−115
2.....	−0,043	100,4	0,363	1,135	1,082	0,457	0,632	−105
3.....	−0,050	101,9	1,498	1,224	1,171	1,089	1,083	− 96
4.....	−0,045	104,6	2,722	1,087	1,177	0,006	0,233	− 86
5.....	−0,035	108,4	3,809	0,931	0,950	−0,227	−0,044	− 77
6.....	−0,024	113,1	4,740	0,675	0,679	−0,271	+0,007	− 70
7.....	−0,014	118,5	5,415	0,416	0,415	−0,264	−0,027	− 63
8.....	−0,004	124,3	5,831	0,122	0,124	−0,291	+0,037	− 58
9.....	+0,004	130,3	5,953	−0,127	−0,130	−0,254	0,044	− 53
10.....	0,010	136,1	5,826	−0,336	−0,340	−0,210	0,017	− 50
11.....	0,016	141,6	5,490	−0,566	−0,567	−0,227	0,060	− 47
12.....	0,020	146,5	4,924	−0,729	−0,734	−0,167	−0,004	− 45
13.....	0,024	150,7	4,195	−0,905	−0,905	−0,171	+0,151	− 44
14.....	0,024	154	3,290	−0,912	−0,925	−0,020	0,125	− 44
15.....	0,021	156,4	2,378	−0,809	−0,820	+0,105	0,082	− 44
16.....	0,016	158	1,569	−0,626	−0,633	0,187	0,009	− 45
17.....	0,011	158,9	0,943	−0,436	−0,437	0,196	0,072	− 47
18.....	0,004	159,4	0,507	0,153	−0,159	0,278	0,040	− 49
19.....	−0,004	159,8	0,354	+0,162	+0,159	0,318	0,045	− 52
20.....	−0,013	160,3	0,516	0,525	0,522	0,363	0,043	− 58
21.....	−0,023	161,3	1,041	0,932	0,928	0,406	0,014	− 62
22.....	−0,033	163,3	1,973	1,349	1,348	0,420	0,022	− 68
23.....	−0,043	166,6	3,322	1,792	1,790	0,442	−0,088	− 76
24.....	−0,050	171,7	5,114	2,137	2,144	0,354	−0,528	− 84
25.....	−0,044	179,0	7,251	1,926	1,970	−0,174	−0,478	− 94
26.....	−0,028	188,2	9,177	1,278	1,318	−0,652	−0,658	−103
27.....	0	198,7	10,495	−0,055	0	−1,308		−113
28.....		209,2						

Tableau V.

Lentille électrostatique. Trajectoire de l'électron. Procédé d'Euler.

z.	Φ.	Φ'.	$\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2$.	$f = -\frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2$.	R.	$\Delta R' = f R \Delta z$.	$R'(z+\Delta z) = R'(z) + \Delta R'$.	$R' = R'(z) + \frac{1}{2}\Delta R'$.	$R(z+\Delta z) = R(z) + R'\Delta z$.
−125.....	98,7	0,03	$9,2.10^{-8}$	$-1,7.10^{-6}$	315	$-5,4.10^{-3}$			315
−115.....	98,3	0,07	$5,1.10^{-7}$	−9,6	315	$-3,0.10^{-4}$			315
−105.....	97,0	0,22	$5,1.10^{-6}$	$-9,6.10^{-7}$	315	$-3,0.10^{-3}$			315
− 95.....	93,5	0,50	$2,5.10^{-5}$	$-4,7.10^{-6}$	315	$-1,5.10^{-2}$	−0,015	−0,01	314,9
− 85.....	87,0	0,79	8,25	$-1,55.10^{-5}$	314,8	−0,049	−0,064	−0,04	314,5
− 75.....	78,0	0,95	$1,48.10^{-4}$	−2,77	314,3	−0,087	−0,177	−0,12	313,3
− 65.....	68,7	1,04	2,29	−4,30	312,7	−0,13	−0,27	−0,23	310,8
− 55.....	57,7	1,03	3,19	−5,98	309,6	−0,19	−0,46	−0,37	306,7
− 45.....	47,6	0,98	4,24	−7,95	304,6	−0,24	−0,74	−0,62	300,5
− 35.....	38,3	0,87	5,17	−9,70	297,4	−0,29	−1,03	−0,89	291,6
− 25.....	30,4	0,71	5,46	$-1,02.10^{-4}$	287,1	−0,29	−1,32	−1,18	279,8
− 15.....	24,4	0,48	3,87	$-7,25.10^{-5}$	273,9	−0,20	−1,52	−1,42	265,6
− 5.....	21,0	0,18	$7,3.10^{-5}$	−1,37	258,5	−0,04	−1,56	−1,54	250,2
+ 5.....	21,0	0,18	$7,3.10^{-5}$	−7,25	242,5	−0,03	−1,59	−1,58	234,4
15.....	24,4	0,48	3,87	$-1,02.10^{-4}$	226,5	−0,16	−1,75	−1,67	217,7
25.....	30,4	0,71	5,46	$-9,70.10^{-5}$	209,3	−0,21	−1,96	−1,86	199,1
35.....	38,3	0,87	5,17	$-9,70.10^{-5}$	189,8	−0,18	−2,14	−2,05	178,6
45.....	47,6	0,98	4,24	−7,95	168,3	−0,13	−2,27	−2,21	156,5
55.....	57,7	1,03	3,19	−5,98	145,4	−0,09	−2,36	−2,31	133,4
65.....	68,7	1,04	2,29	−4,30	121,8	−0,05	−2,41	−2,39	109,5
75.....	78,0	0,95	$1,48.10^{-4}$	−2,77	97,5	−0,03	−2,44	−2,43	85,2
85.....	87,0	0,79	8,25	−1,55	73,0	−0,01	−2,45	−2,45	60,7
95.....	93,5	0,50	$2,5.10^{-5}$	$-4,7.10^{-6}$	48,4		−2,45	−2,45	36,2
105.....	97,0	0,22	$5,1.10^{-6}$	$-9,6.10^{-7}$					11,7
115.....	98,3	0,07	$5,1.10^{-7}$	$-9,6.10^{-8}$					−12,8
125.....	98,7	0,03	$9,2.10^{-8}$	−1,7					

Tableau VI.

Lentille électrostatique. Trajectoire de l'électron. Procédé de Störmer-Adams.

Numéros.	z.	R.	ΔR.	$\Delta^2 R$.	ξ.	$\Delta\xi$.	$\Delta^2\xi$.
0	—125	315			$-5,36.10^{-4}$		
			-3.10^{-4}			$-2,49.10^{-3}$	
1	—115	315		$-2,75.10^{-2}$	$-3,03.10^{-3}$		$-2,48.10^{-2}$
			$-2,72.10^{-2}$			$-2,73.10^{-2}$	
2	—105	315		$-3,24.10^{-2}$	$-3,03.10^{-2}$		—0,091
			$-5,96.10^{-2}$			—0,118	
3	— 95	314,9		—0,156	—0,148		—0,222
			— 0,216			—0,340	
4	— 85	314,7		—0,507	—0,488		—0,042
			— 0,723			—0,382	
5	— 75	314,0		—0,874	—0,870		—0,092
			— 1,597			—0,474	
6	— 65	312,4		—1,352	—1,344		—0,032
			— 2,949			—0,506	
7	— 55	309,5		—1,853	—1,850		—0,064
			— 4,802			—0,570	
8	— 45	304,7		—2,415	—2,420		+0.108
			— 7,217			—0,462	
9	— 35	297,5		—2,873	—2,882		0,409
			—10,090			—0,053	
10	— 25	287,4		—2,901	—2,935		0,998
			—12,991			+0,945	
11	— 15	274,4		—1,907	—1,990		0,690
			—14,898			1,635	
12	— 5	259,5		—0,297	—0,355		—1,615
			—15,195			0,020	
13	+ 5	244,3		—0,470	—0,335		—1,342
			—15,665			—1.322	
14	15	228,6		—1,769	—1,657		—0.834
			—17,434			—0,498	
15	25	211,2		—2,225	—2,155		+0,795
			—19,659			+0,297	
16	35	191,5		—1,792	—1,858		—0,211
			—21,451			+0,508	
17	45	170.0		—1,368	—1,350		—0,977
			—22,819			—0,469	
18	55	147,2		—0,962	—0,881		+0.819
			—23,781			+0,350	
19	65	123,4		—0,463	—0,531		—0,093
			—24,244			+0,257	
20	75	99,2		—0,289	—0,274		—0,099
			—24,526			+0,158	
21	85	74,7		—0,124	—0,116		—0,066
			—24,650			+0,092	
22	95	50,0		—0,030	—0,024		—0,070
			—24,620			+0,022	
23	105	25,4		—0,008	—0,002		—0,020
			—24,628			+0,002	
24	115	0,8		—0,002	0,000		
			—24,630				
25	125	—23,8					

LES CELLULES PHOTOÉLECTRIQUES A COUCHE D'ARRÊT

PAR JEAN ORTUSI,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences.
Ingénieur au laboratoire de Recherches physiques de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil.

SOMMAIRE. — *Dans cet article, l'auteur étudie les propriétés des cellules photoélectriques à couche d'arrêt en insistant plus spécialement sur les possibilités d'explication du phénomène physique qui est à la base du fonctionnement de ces cellules.*

C'est une tentative pour dégager un exposé cohérent des nombreux documents parus sur cette question.

Une revue sommaire de ces derniers est, par ailleurs, exposée à la suite de l'article afin de faciliter éventuellement le travail de recherches. Le sujet constituait en lui-même la deuxième thèse soutenue par l'auteur en Sorbonne le 11 mars 1944.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. **Définition.**

On appelle cellules photoélectriques à couche d'arrêt, ou couples photoélectriques, les appareils basés sur le phénomène physique suivant :

Lorsque l'on éclaire un contact semi-conducteur métal, on constate, en général, qu'une force électromotrice prend naissance entre les deux substances; cette force électromotrice est due à l'éclairement du contact.

Une telle cellule est alors essentiellement constituée par une faible épaisseur de substance semi-conductrice comprise entre deux électrodes métalliques dans des conditions telles que, une fois la force électromotrice apparue, elle puisse être utilement mesurée.

2. **Historique.**

Depuis très longtemps, de nombreux chercheurs avaient remarqué l'action de la lumière sur les redresseurs secs. Ce n'est toutefois que depuis une quinzaine d'années que l'on a pu faire la distinction entre l'effet thermoélectrique superposé (obtenu principalement avec des sources riches en rayons infrarouges) et l'effet purement photoélectrique. A partir de ce moment, l'étude du phénomène a subi une rapide impulsion. A l'étranger deux écoles s'affrontent : d'une part l'école allemande de Schottky et de ses collaborateurs, d'autre part l'école anglo-soviétique avec Joffé. En France, le premier, Liandrat réussit à démontrer le caractère électronique du phénomène et fournit de nombreuses preuves de son mécanisme quantique. Enfin le livre remarquable de Boutry [1] résume les propriétés essentielles des couples. Depuis, de nombreuses recherches ont eu lieu, qui semblent confirmer les explications quantiques. Toutefois, à l'heure actuelle, aucune théorie vraiment complète n'a pu être fournie des phénomènes créés.

3. **Genre de cellules.**

Nous avons vu que presque tous les corps semi-conducteurs fournissent une force électromotrice sous l'influence de la lumière, mais que, pour la plupart (cas du contact sulfure de plomb-argent), la suppression des radiations infrarouges amène une diminution énorme de l'effet.

En outre, le courant obtenu présente une inertie considérable. La force électromotrice engendrée est surtout d'origine thermo-électrique. Par contre, pour quelques contacts particuliers, l'inertie est très faible et en outre la répartition spectrale de l'effet ne coïncide pas avec la répartition spectrale

énergétique de la lumière employée. Elle ne dépend que du contact.

Parmi les semi-conducteurs qui offrent ainsi une force électromotrice d'origine photoélectrique, les plus connus sont l'oxyde cuivreux et le sélénium. Toutefois le sulfure de thallium étudié par Nix et Troptow [2] semble offrir un grand intérêt.

Cellules a effet antérieur et celulles a effet postérieur. — Il existe deux types de cellules, selon que le contact à effet photoélectrique a lieu sur la face éclairée ou sur l'autre :

1° *Cellules à effet antérieur.* — La figure 1 montre le schéma d'une telle cellule. L'épaisseur du semi-conducteur est de quelques dixièmes de millimètre.

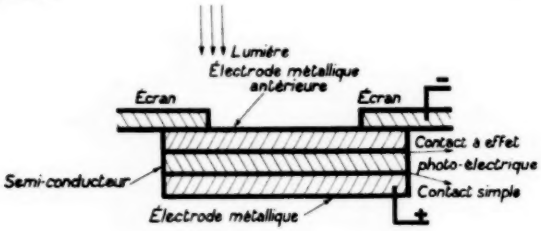


Fig. 1.

L'électrode métallique antérieure, transparente à la lumière, est obtenue par pulvérisation cathodique ou par évaporation du métal dans le vide.

2° *Cellules à effet postérieur.* — Dans ce type de cellules, le contact à effet photoélectrique se fait entre le semi-conducteur et l'électrode postérieure. L'électrode antérieure n'est pas soumise à l'action de la lumière. Le contact, dans le cas de l'oxyde cuivreux, se fait en oxydant partiellement par chauffage à 1040°, une lame de cuivre de façon à former une pellicule très adhérente d'oxyde. On

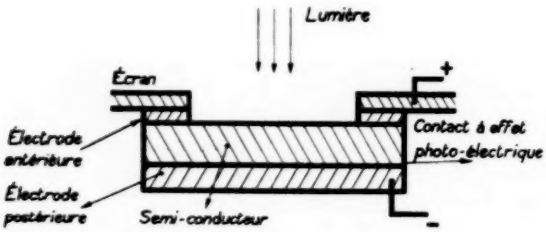


Fig. 2.

décape alors la surface extérieure de cet oxyde au jet de sable et l'on forme par pression le contact simple avec l'électrode antérieure. La sensibilité de ces cellules est très faible puisque presque toute la lumière a été absorbée par la masse du semi-conducteur. Aussi ces cellules ne sont-elles plus utilisées, leur intérêt théorique est néanmoins très grand. En effet, l'examen des figures 1 et 2 montre que, dans les deux cas, les électrons circulent à l'intérieur de la cellule, dans le sens semi-conducteur-métal. Ceci suffit à prouver que l'explication du phénomène ne peut être fournie par la diffusion des électrons par effet Dember (différence de potentiel entre la face éclairée et la face sombre), et par suite confirme l'hypothèse de la couche d'arrêt que nous envisagerons ultérieurement.

CHAPITRE II.

Caractéristiques physiques des cellules.

1. Construction des cellules à couche d'arrêt.

Nous ne décrirons que la construction des cellules à effet antérieur, les autres n'étant plus utilisées.

a. Construction d'une cellule à l'oxyde cuivreux. — On part d'une lame de cuivre électrolytique d'environ 0,5 mm d'épaisseur que l'on oxyde complètement au four à 1025° pendant 8 h. Pour obtenir une bonne cristallisation de Cu_2O, on le porte pendant 4 h à 1180°.

Comme nous le verrons, la résistance de contact dépend de la teneur en oxygène de la surface utile du Cu_2O. Pour faire varier cette dernière, chaque constructeur emploie des moyens propres. Selon l'usage de la cellule, on peut utiliser des réducteurs ou des oxydants. On nettoie alors la surface de l'autre face à la toile émeri ou au jet de sable pour réduire l'épaisseur et diminuer la résistance du contact ordinaire avec l'électrode postérieure. Ce dernier contact se fait par pression simple. L'électrode antérieure est obtenue surtout par pulvérisation cathodique, l'évaporation dans le vide donnant de moins bons résultats. Le métal pulvérisé est de l'or. On pulvérise parfois dans une atmosphère d'hydrogène raréfié pour obtenir de grandes résistances de contact. Le contact entre la masse d'or pulvérisé et l'électrode antérieure se fait par l'intermédiaire de grilles, noyées dans la couche d'arrêt d'épaisseur très faible [3].

b. Construction d'une cellule au sélénium. — On dépose sur une plaque de fer une couche très mince de sélénium amorphe et l'on transforme celui-ci en sélénium métallique par recuit très prolongé à 200°. On dépose alors par pulvérisation cathodique

un film d'argent transparent. L'opération ne réussit en général qu'une fois sur dix, sans que l'on puisse connaître les raisons de cette irrégularité. Ici encore, de nombreux brevets [4] décrivent des procédés spéciaux pour réduire la résistance de contact entre le sélénium et l'électrode postérieure. Enfin un brevet allemand [5] utilisant une remarque de Teichmann [6] préconise, entre la couche de sélénium et l'électrode antérieure, l'emploi d'une couche mince d'oxyde de césium.

2. Sensibilité des cellules à couche d'arrêt.

La sensibilité dont il s'agit est la sensibilité commerciale. Elle s'exprime en ampères par lumen et est relative à une lumière de composition spectrale déterminée (lampe dite demi-watt). Seule, la sensibilité vraie permet de déterminer le rendement quantique de la cellule (rapport du nombre d'électrons émis par le nombre de quanta absorbés). La sensibilité d'un couple photoélectrique est déterminée en général par deux variables distinctes :

1° Le courant de court-circuit obtenu lorsque les bornes de la cellule éclairée sont court-circuitées.

2° La différence de potentiel en circuit ouvert.

Les courbes qui donnent ces variables en fonction de l'éclairement sont représentées sur les figures 3 et 4.

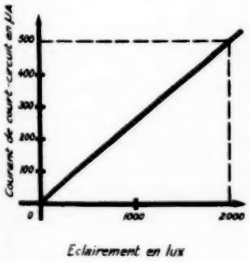


Fig. 3.

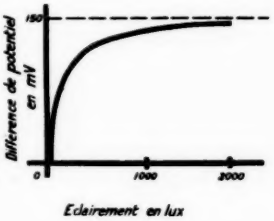


Fig. 4.

L'expérience montre que, dans une très grande zone de flux lumineux, le courant de court-circuit est proportionnel à l'intensité du flux incident, tandis que la différence de potentiel en circuit ouvert tend vers une saturation pour les flux intenses.

Les courbes précédentes, tirées d'un article de Liandrat [7], sont relatives à une cellule au sélénium de 10 cm² de surface utile. Cette cellule possède donc une sensibilité égale à 250 μA par lumen.

Les cellules au sélénium sont deux à trois fois plus sensibles que les cellules à l'oxyde de cuivre. En outre la surface utile est en général plus grande. Malheureusement, la résistance de contact décroît de façon inversement proportionnelle à la surface utile. Aussi pour la mesure d'un flux lumineux, il y a intérêt à avoir une surface utile égale à la surface éclairée. (Nous verrons plus loin que la grandeur de la résistance de contact est une caractéristique essentielle d'une cellule.)

Lorsque la résistance extérieure augmente, la courbe de la figure 3 s'incurve de plus en plus pour ressembler à la courbe de la figure 4 ($R \to \infty$). Il ressort de ceci que seul le courant de court-circuit peut servir à mesurer directement le flux. La faible résistance extérieure convenable peut alors être prise d'autant plus grande que la résistance de contact de la couche limite est grande.

3. Distribution spectrale de l'effet.

Elle est déterminée par la courbe qui donne les variations du courant débité en fonction de la longueur d'onde de la radiation monochromatique qui éclaire la cellule à intensité lumineuse constante. Les résultats sont très variables avec le type de cellules et les modalités de fabrication. La sensibilité spectrale dépend beaucoup des pertes de lumière dans l'électrode antérieure ou dans le semi-conducteur (dans le cas des cellules à effet postérieur). On peut tracer les courbes correspondantes, compte tenu des pertes dans l'électrode antérieure. On constate que ces courbes sont alors à peu près identiques et sont très voisines de la courbe de photoconductivité du semi-conducteur. (Nous verrons en effet ultérieurement, que tous les semi-conducteurs qui constituent les couples présentent le caractère de photoconductivité).

Les figures 5 et 6 sont relatives d'une part à l'oxyde cuivreux [8] et [8 *bis*] et d'autre part au

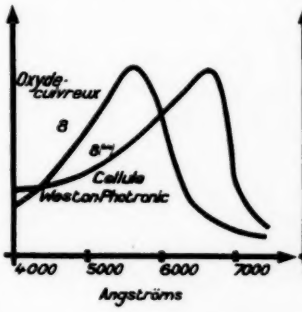


Fig. 5.

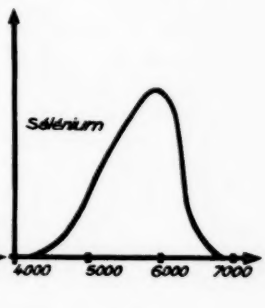


Fig. 6.

sélénium [9]. On voit que la sensibilité de l'oxyde cuivreux persiste dans l'infrarouge (jusqu'à 1,4 μ). Il n'en est pas de même pour le sélénium.

La forme de cette courbe dépend toutefois légèrement de la résistance du circuit extérieur [9], de l'intensité de l'éclairement [10] et enfin de la température [11]. Dans ces deux derniers cas, la région la plus instable des courbes de sensibilité est dans la région rouge et infrarouge du spectre.

Il y a souvent, pour des mesures d'éclairement, intérêt à rapprocher la courbe de distribution spectrale de la cellule de celle de l'œil. On y arrive facilement en modifiant l'épaisseur et la nature de l'électrode antérieure.

Actions des rayons X. — Felsinger [12] et Sandström [13] ont étudié l'action des rayons X doux de longueur d'onde comprise entre 0,5 et 20 Å sur une cellule montée dans le tube à vide d'un générateur de rayons X. Les courants sont toutefois trop petits pour permettre une mesure facile d'intensité. Enfin Bonet-Maury signale [14] la possibilité de se servir des cellules à couche d'arrêt pour les mesures d'intensité des rayons α et β. Dans le même ordre d'idées, Becker et Kruppke [15], employant des rayons cathodiques, ont obtenu un courant photoélectrique assez fort qui, pensent-ils, peut servir à mesurer l'intensité d'un faisceau de rayons cathodiques.

4. Variations de l'effet avec le temps.

Bien que dépourvus d'inertie, les couples photoélectriques ont toutefois des variations importantes avec les temps d'illumination prolongés. On distingue deux sortes de variations :

1° Les variations transitoires,
2° Les variations permanentes.

A. Variations transitoires. — Elles se divisent à leur tour en deux catégories :

a. Effet de sensibilisation apparente. — Cet effet est dû à ce que le courant de la cellule ne s'établit que progressivement. Il est provoqué par le retard mis dans l'établissement de l'équilibre électrique. Ce retard est d'autant plus court que les photons incidents sont plus chargés d'énergie (longueur d'onde courte) et que la densité d'énergie tombant sur la cellule est plus grande (flux lumineux intense). L'expérience confirme cette théorie. L'effet n'a lieu que pour les intensités lumineuses faibles et est surtout marqué pour les radiations rouges.

b. Phénomène de « fatigue ». — Ce phénomène consiste, au contraire, en une désensibilisation progressive sous l'action de la lumière. Le courant décroît après passage par un maximum vite atteint. Cette diminution a lieu de plus en plus lentement. Un repos dans l'obscurité ramène, en général, la cellule à l'état initial, mais parfois après plus de 30 mn. Ce phénomène doit être attribué à une modification réelle, plus ou moins grande, des propriétés de la couche sensible.

Cette modification semble être due à l'effet d'une absorption sélective qui pourrait se traduire par une diminution de la résistance de contact. On constate qu'elle baisse beaucoup lorsque l'on filtre les radiations rouges du spectre. Enfin elle est d'autant plus grande, au contraire de la précédente, que l'intensité lumineuse est forte.

La figure met en évidence, les caractères généraux des deux effets transitoires.

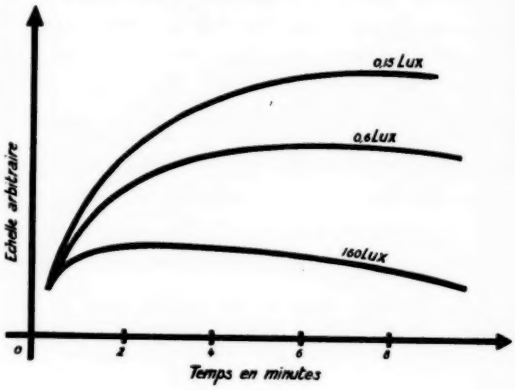


Fig. 7.

B. Variations permanentes. — Ces variations, qui peuvent être soit une sensibilisation soit une désensibilisation, sont provoquées par des éclairements prolongés et intenses. Elles s'accompagnent comme on l'a vu, d'une modification de la répartition spectrale. Une partie de ces variations disparaît dans l'obscurité et, après un très long temps, la courbe de sensibilité spectrale redevient la même qu'auparavant. Toutefois la sensibilité globale et spectrale reste définitivement altérée dans une certaine mesure. Bergmann et Peltz [16] constatèrent un accroissement de 20 % pour la force électromotrice et de 3 % pour le courant de court-circuit en soumettant une cellule à un éclairement de 4 500 lux pendant 24 jours. Cette expérience semble prouver que les variations seraient dues à un accroissement de la résistance de contact (comme nous le verrons par la suite) sous l'influence de la lumière.

A l'étude de ces phénomènes, il faut ajouter l'influence de la fréquence du flux lumineux.

En effet, de ce que les couples photoélectriques ne marquent pas d'inertie appréciable, il ne faut

pas en déduire qu'ils sont capables de reproduire fidèlement un flux modulé. Bien au contraire, l'intensité moyenne du courant modulé tombe rapidement, quand la fréquence du flux modulé qui éclaire la cellule s'élève. La figure 8 donne un exemple avec un couple à l'oxyde cuivreux.

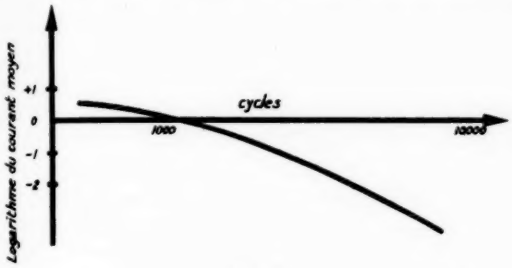


Fig. 8.

Nous verrons l'explication de ce phénomène dans l'étude du circuit électrique équivalent au couple, la couche semi-conductrice constituant un condensateur court-circuitant aux hautes fréquences la résistance de contact.

5. Variations de l'effet avec la température.

Cette variation, considérable pour les couples à effet postérieur, est encore très marquée pour les couples à effet antérieur.

La figure 9 montre les variations avec la température de la force électromotrice e_∞ et du courant

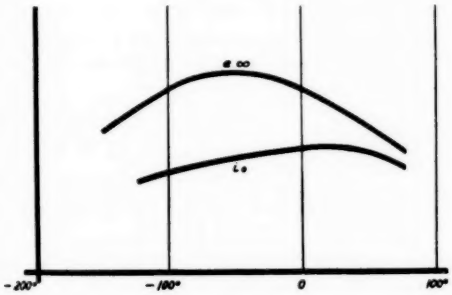


Fig. 9.

de court-circuit i_0 d'une cellule au sélénium donnée par Bergmann et Peltz [16]. Le maximum de la force électromotrice est à $-50°$ et celui du courant à $+80°$. Dans la bande de température pratique ($-20°$ à $+30°$), le coefficient de température est de $-0{,}003$ pour e_∞ et de $+0{,}001$ pour i_0.

Lange [17], Kurtschatow et Sinelnikov [18] ont étudié aussi comment se déforment les courbes spectrales de sensibilité avec la température. Elles sont peu déformées mais se déplacent légèrement vers les courtes longueurs d'onde lorsqu'on refroidit la cellule. Les variations des effets des cellules avec la température sont dues à la variation de la résistance de contact. L'expérience montre alors que celle-ci augmente lorsque la température diminue, ce qui est conforme à la théorie de la conductivité des semi-conducteurs.

En effet, la résistance de contact R obéit à la loi de Vogt $R = R_0 e^{\frac{W}{Tk}}$, loi qui signifie que la conductibilité électrique des semi-conducteurs est liée au nombre d'électrons libérés par agitation thermique malgré le travail d'arrachement W dans les couches intérieures des niveaux d'énergie, beaucoup plus que par suite de l'action de freinage des chocs moléculaires (loi d'Ohm).

Roulleau [19], compte tenu du fait que le travail d'arrachement W est à peu près indépendant de T (Joffé [20]), donne la nature des explications relatives aux anomalies apparentes du coefficient de température. Celui-ci est en effet fonction des deux variables R et T liées par la loi de Vogt.

CHAPITRE III.

Explication sommaire de l'effet.

1. Liaison entre l'effet redresseur et l'effet photoélectrique. La couche d'arrêt.

L'expérience montre que : d'une part les semi-conducteurs utilisés pour l'effet photoélectrique présentent en même temps un effet de photoconductivité très marqué, et d'autre part les contacts responsables de l'effet photoélectrique sont aussi des contacts redresseurs. De nombreuses recherches ont été faites dans le but de prouver la présence simultanée de ces deux phénomènes.

Borissow, Sinelkikow et Walther [21], en pulvérisant une couche d'or dans une atmosphère d'hydrogène raréfié, ont obtenu des cellules présentant une grande force électromotrice photoélectrique, mais pas d'effet de redressement. Mais ceci est dû, comme nous le verrons, au fait qu'ils obtenaient ainsi une résistance de contact très grande, même dans le sens de passage facile. Mme Roy-Pichon [22] signale aussi avoir obtenu des cellules présentant l'effet photoélectrique sans effet de redressement. Mais ce résultat était dû à l'absorption du sélénium, qui ne laisse présenter que l'effet antérieur mis ainsi en évidence tandis que, pour l'effet redresseur,

le contact postérieur intervient pour donner un résultat total nul.

Il ressort, à l'heure actuelle, que les effets photoélectriques et redresseurs sont liés entre eux et qu'une même explication doit être donnée pour les deux phénomènes.

Ainsi donc, il doit exister, entre l'électrode et la masse du semi-conducteur qui composent le contact considéré, une barrière de potentiel fonctionnant de façon unidirectionnelle, formant une couche d'arrêt, matérielle ou non, agissant comme un frein sur le mouvement des électrons dans le sens métal semi-conducteur.

La figure 10 est la courbe classique de redressement d'un contact rectifiant. On voit que l'effet de redressement ne se fait pas sentir si i et v tendent vers zéro.

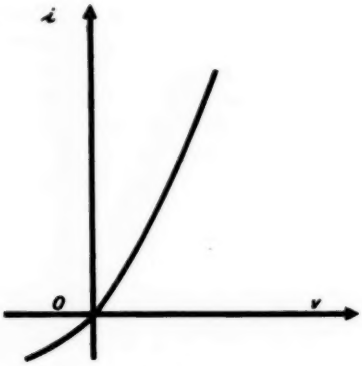


Fig. 10.

Aucune certitude ne peut être fournie sur la nature exacte de la couche d'arrêt. Dans le cas de l'oxyde de cuivre, où l'on sait que la conductivité de ce corps dépend de la quantité d'oxygène en excès, on suppose que la couche d'arrêt est une couche de Cu^2O pur, très résistante.

En effet, l'expérience montre que cette couche ne se forme que dans les cas où il y a réduction à la surface du Cu^2O. On ne sait pas toutefois si cette couche est responsable de l'effet redresseur. Toute une série de travaux (Schottky et Waibel [23], Jusé [24]) ont cherché à mettre en évidence la matérialité de la couche par grattage ou dosage chimiques.

Dans le cas du sélénium, on ne sait presque rien sur la nature de la couche, qui, dans l'hypothèse d'une existence matérielle, peut être due soit à la formation superficielle d'une forme allotropique non conductrice, soit à la formation d'une couche de séléniure métallique lors de la pulvérisation.

2. Circuit électrique équivalent.

L'expérience montre que les propriétés des cellules à couche d'arrêt s'interprètent assez bien en faisant les diverses hypothèses suivantes :

1° Les électrons libérés par l'effet photoélectrique proviennent de la masse du semi-conducteur.

2° Ces électrons, de par leur énergie cinétique, franchissent la couche d'arrêt en fournissant dans le sens semi-conducteur métal (sens 1) un courant constant i_0 indépendant du circuit extérieur.

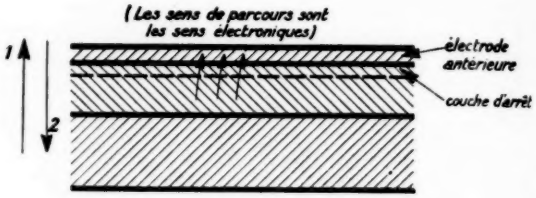


Fig. 11.

3° Sous l'action de la différence de potentiel existant ainsi entre les bornes de la cellule, une partie du courant se dépense dans le circuit extérieur, tandis qu'une autre partie rétrograde à l'intérieur de la cellule (sens 2). Nous aboutissons ainsi au schéma électrique de la figure 12. La cellule est alimentée par un générateur G à courant constant. Une partie du courant I est dépensée dans la résistance extérieure R. Une autre partie I' revient dans la cellule dont R_1 est la résistance dans le sens de passage facile du courant. C est la capacité de la couche d'arrêt et r la résistance de la couche de sélénium ou d'oxyde, non négligeable.

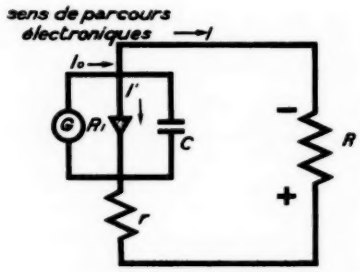


Fig. 12.

Ce schéma électrique justifie le fait que le courant de court-circuit, égal au courant photoélectrique, est proportionnel au flux lumineux.

Au contraire, la différence de potentiel en circuit ouvert e_x, est donnée par la relation

$$e_x = R_1 i_0.$$

Effectivement la courbe donnant i_0 en fonction de e_x, pour divers éclairements, coïncide à peu près avec la caractéristique du redresseur. Toutefois, pour les éclairements importants et pour les grandes longueurs d'onde, on constate une certaine divergence entre les deux courbes due à la variation de R_1 sous l'effet de la lumière.

De très nombreuses recherches ont été faites sur la mesure au pont de Wheatstone de la résistance et de la capacité de la couche d'arrêt (la résistance dont il est question est la pente de la courbe de la figure 10 obtenue pour $i = 0$). Il faut opérer avec une très faible tension alternative pour ne pas avoir l'effet de redressement.

L'étude des diagrammes d'impédance obtenus montre d'abord que la théorie du circuit équivalent s'applique. (Certaines anomalies signalées par Wood [25] s'expliquent très bien par l'existence d'un second circuit équivalent relatif à l'électrode postérieure Liandrat [26]). Fritz Goose [27] opérant sur une cellule au sélénium trouve une résistance de 1000 Ω et une capacité de 2000 μF. La résistance et la capacité varient lorsqu'on éclaire la cellule. D'après Goose, la résistance de la cellule étudiée baissait jusqu'à 500 Ω et la capacité augmentait jusqu'à 7 500 μF.

Dans le cas de l'oxyde cuivreux, la mesure de la capacité permet de connaître l'épaisseur de la couche d'arrêt si l'on suppose que la constante diélectrique de l'isolant est celle de l'oxyde cuivreux pur. On trouve des épaisseurs allant de 10^{-6} à 10^{-5} cm.

Dans le cas du sélénium, les diverses hypothèses faites sur la nature chimique de la couche d'arrêt, fournissent aussi des résultats du même ordre.

Nous verrons que, par une méthode tout à fait différente, Liandrat a réussi à mesurer ces épaisseurs. Il a trouvé des chiffres du même ordre. Au contraire, Grandhall pense que la couche d'arrêt est simplement formée par une double couche électrique due à la diffusion des électrons par l'effet des différences de concentration électronique dans le métal et dans le semi-conducteur (effet de charge d'espace). Ces hypothèses donneraient pour l'épaisseur de la couche d'arrêt des valeurs beaucoup plus faibles, de l'ordre de l'angstrom.

Il faut retenir de toutes ces expériences, en vue des applications pratiques, qu'une cellule au sélénium a une résistance de l'ordre de 1000 Ω alors qu'une cellule à l'oxyde de cuivre n'a qu'une résistance d'une centaine d'ohms.

Il s'ensuit que le galvanomètre de mesure peut être beaucoup plus résistant et partant plus sensible dans le premier cas que dans le second. Rappelons, en outre, que seul le courant de court-circuit, mesurant le courant photoélectrique, est proportionnel au flux incident et enfin que l'existence de la capacité en parallèle empêche de se servir des couples photoélectriques pour des mesures de flux lumineux rapidement variables.

3. Démonstration du caractère électronique de l'effet. Équation d'Einstein.

Nous avons vu que tous les semi-conducteurs fournissant des contacts photoélectriques et rectifiants présentaient en même temps l'effet de photoconductivité.

Il s'ensuit que le phénomène d'émission électronique de contact sans inertie doit être suivi d'un phénomène secondaire de photoconductivité présentant des caractères d'inertie certains et occasionné par le passage même du courant primaire. Le courant secondaire étant un phénomène parasite, il doit être éliminé pour pouvoir mesurer le courant photoélectrique proprement dit. La méthode employée consiste à éclairer la cellule pendant des temps très brefs (décharges dans une vapeur métallique) ou par un flux lumineux modulé. On élimine ainsi le phénomène secondaire. La méthode d'éclairement balistique permet au contraire de déterminer la part de courant due à chaque effet. Le galvanomètre dévie d'abord dans un sens jusqu'à un maximum donné par le courant primaire, puis revient brusquement en arrière. Tant que la différence de potentiel appliquée aux bornes de la cellule est due à la chute ohmique de tension dans le circuit extérieur (partie AB de la courbe de la figure 13), le courant secondaire est inférieur en module et opposé au courant primaire. Par contre si l'on étudie (Liandrat [28]) la caractéristique de la cellule avec et sans éclairement sous des tensions négatives croissantes, on constate que, pour une certaine tension négative appliquée (point C), le courant de photoconductivité est égal et opposé au courant primaire et qu'au delà il devient supérieur en module. Mais le point C dépend de la nature de la cellule employée et de l'éclairement. Il ne représente que la compensation de deux courants opposés. Si, par contre, l'on porte en ordonnée le courant primaire i en fonction de V, on constate que ce courant s'annule pour une tension négative

bien définie V_m ne dépendant que de la longueur d'onde. Cette tension négative (opposée au passage des électrons du courant primaire) correspond

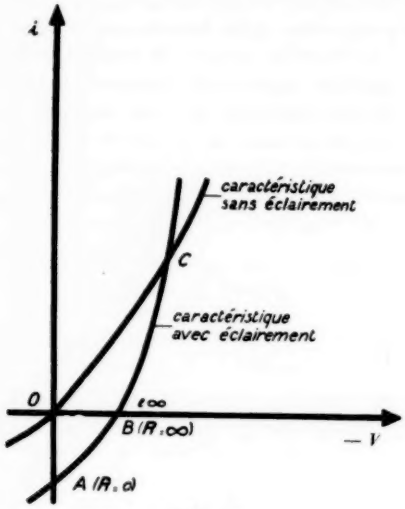


Fig. 13.

précisément à l'énergie cinétique des électrons produits par l'effet photoélectrique primaire d'émission. Elle est donnée par l'équation d'Einstein

$$eV_m = h(\nu - \nu_0).$$

En portant en abscisse la fréquence et en ordonnée la tension V_m, Liandrat put obtenir la droite

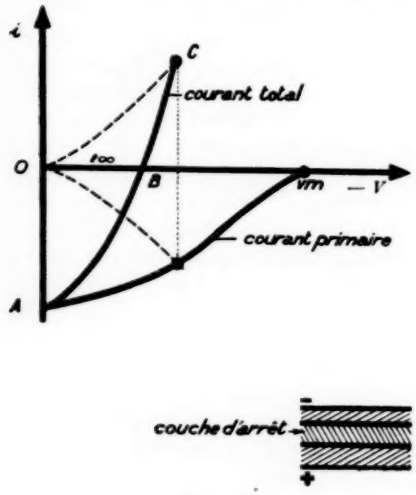


Fig. 14.

d'Einstein avec une détermination correcte du seuil photoélectrique. La pente de la droite permet de calculer la constante de Planck à moins de 3% près. Le caractère électronique de l'émission photoélectrique primaire est ainsi mis en évidence.

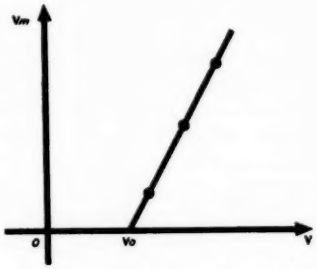


Fig. 15.

4. Assimilation du courant d'émission primaire à l'émission photoélectrique des métaux. Formules de Richardson et de Schottky.

Lorsque l'on établit entre les deux électrodes de la cellule une tension positive (tension qui accélère les électrons produits par l'émission photoélectrique), on constate des phénomènes complètements différents du cas précédent. D'abord le courant obtenu est sans inertie et, par suite, il est dû entièrement au courant d'émission primaire. Ensuite, ce courant augmente lorsque le champ augmente, sans tendre vers un état de saturation. Cette augmentation qui n'est pas due à une conductibilité ohmique, ne peut s'expliquer que par une diminution du travail de sortie des électrons sous l'action du champ. En effet, la couche d'arrêt ayant une épaisseur très faible, le champ électrique dans la région d'émission électronique est très grand.

Or, dans le cas de l'émission électronique des métaux dans le vide, un raisonnement basé sur l'application des formules de l'électrostatique classique à l'électron qui vient de quitter la surface conductrice, conduit sans difficulté à la formule de Schottky

$$\varphi = \varphi_0 - \sqrt{eE},$$

où φ désigne le potentiel correspondant au travail de sortie, e la charge électronique et E le champ électrique en unités électrostatiques.

Liandrat [28] a pu réussir à montrer que la formule de Schottky s'appliquait aussi au cas de l'émission électronique dans un semi-conducteur en traçant la droite donnant $\sqrt{V}$ en fonction de φ. La pente de la droite obtenue fournit l'épaisseur de la couche d'arrêt. On trouve des résultats à peu près équivalents à ceux que donnent les mesures de capacité.

Liandrat a pu mesurer le potentiel φ en se servant du théorème de Richardson-Suhrman [29].

Lorsque l'on fait tomber, sur une surface métallique, le rayonnement total d'un corps noir porté à la température T, l'émission photoélectrique varie, en fonction de T, suivant la même loi que l'émission thermionique d'un métal porté à la température T :

$$i = AT^p e^{-\frac{e\varphi}{kT}} \quad (\text{avec } p = 2).$$

(Dans le cas actuel, l'expérience montre que p doit avoir la valeur plus correcte $p = 4$).

En portant en l'abscisse $\frac{1}{T}$ et en ordonnée $\log i$, Liandrat put constater que la formule de Richardson s'appliquait aussi aux cellules photoélectriques à couche d'arrêt et, de la pente de la droite obtenue, il en déduisait φ. (Notons que la variation de i en fonction de T peut servir à mesurer avec un couple photoélectrique la température d'un corps noir émissif, Larsen et Shenk [30]).

Le caractère essentiellement émissif du phénomène a ainsi pu être mis en évidence. Toutefois, aucune des expériences faites n'a pu fournir de preuves concrètes aux diverses tentatives d'explications théoriques de l'effet redresseur et photoélectrique que nous allons maintenant présenter.

CHAPITRE IV.

TENTATIVES D'EXPLICATIONS THÉORIQUES. DE L'EFFET REDRESSEUR ET PHOTOÉLECTRIQUE.

1. Théorie de Schottky [31].

Cet auteur fait intervenir deux sortes de conduction à l'intérieur d'un semi-conducteur. Dans le cas de l'oxyde cuivreux, par exemple, il y aurait des « défauts d'électrons » composés vraisemblablement d'ions Cu^{++} et des électrons proprement dits, la concentration électronique tenant compte de la présence simultanée de ces deux sortes d'éléments. Cette concentration dépendrait alors essentiellement de la quantité d'impuretés présentes dans le semi-conducteur. La présence de la couche d'arrêt se traduit par une variation de la concentration électronique analogue à la variation de la concentration des ions Na qui a lieu lorsque de la vapeur de sodium est introduite à l'intérieur d'un tube électronique.

Cette variation de la concentration électronique se traduit par une barrière de potentiel aux bornes de la couche d'arrêt, à la suite d'un phénomène analogue à l'effet bien connu de la charge d'espace dans les lampes de T. S. F. Les électrons diffusent du métal où la concentration est grande, dans le semi-conducteur où elle est faible. Ceci explique le sens de passage unidirectionnel du courant.

Cette explication n'est pas très claire et semble en contradiction avec l'expérience (effet Hall, expériences de Liandrat) qui ont montré le caractère entièrement électronique du courant.

2. Théorie des entonnoirs de Teichmann [32].

La théorie de la couche d'arrêt, sous quelque forme qu'on la considère, ne tient aucun compte d'un fait expérimental important : on n'obtient jamais d'éléments photoélectriques ou redresseurs si la surface du semi-conducteur n'est pas, au voisinage du métal, d'aspect cristallin. Ce résultat apparut essentiel à Teichmann qui s'en est servi pour établir un modèle de contact particulièrement représentatif. Cet auteur a imaginé un réseau d'entonnoirs séparant deux gaz maintenus à des pressions différentes correspondantes aux différences de concentrations électroniques. Un tel système se comporte donc comme une soupape ou un redresseur à gaz.

Dans le cas présent, l'entonnoir est réalisé dans le réseau cristallin d'un semi-conducteur en contact avec un métal sous la forme d'un « entonnoir de champ » formé par les lignes de force du champ intérieur dans le réseau mixte des cristaux Cu et Cu^2O. Teichmann suppose que la couche d'arrêt est composée d'un nombre fini de contacts localisés en certains points privilégiés du réseau cristallin.

Aucune interprétation de l'effet photoélectrique n'est donné par l'auteur qui l'assimile à l'effet Dember.

3. Théorie quantique.

Les théories que nous venons de présenter n'expliquent pas beaucoup le phénomène. Beaucoup plus compréhensible et beaucoup plus sérieuse apparaît la théorie quantique basée sur l'existence des niveaux d'énergie électroniques. Cette théorie a été exposée dans de nombreux articles et dans l'ouvrage de Dow [33].

Au zéro absolu, tous les niveaux au-dessous du niveau maximum normal sont complètement occupés; ceux au-dessus du niveau normal maximum sont complètement vides. A la température ordinaire un petit nombre d'électrons occupe normalement les niveaux libres au dessus du niveau normal

maximum. Ces niveaux vacants là sont quelquefois, appelés « niveaux courants ». Cette terminologie est employée parce que le flux des électrons d'une partie du métal à l'autre est supposé être dû principalement au mouvement des électrons dans les niveaux. L'application d'un champ électrique dans un métal se traduit par une baisse de la hauteur des niveaux d'énergie.

Dans les isolants, les électrons des atomes peuvent être représentés comme résidant dans des niveaux d'énergie cinétique définis, comme dans les conducteurs et dans les atomes individuels. Toutefois, les électrons dans les isolants sont solidement attachés aux molécules et ne peuvent pas prendre d'énergie cinétique supplémentaire. Il s'ensuit qu'il y a dans le diagramme des niveaux d'énergie d'un isolant, une série très étendue de valeurs d'énergie située au-dessus des niveaux d'énergie remplis et correspondant à une absence de niveaux (*fig.* 16).

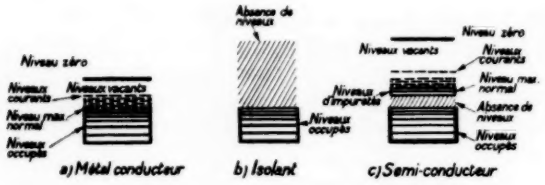


Fig. 16.

Les exigences quantiques prohibent l'existence d'état d'énergie à l'intérieur de la zone d'absence de niveaux. Dans un isolant, le niveau normal maximum est donc un maximum absolu; aucun électron ne peut s'élever au-dessus de lui-même si le niveau normal maximum vient à baisser par suite de l'application d'un champ électrique. Le courant de conduction est donc impossible.

Les propriétés de semi-conducteurs représentent une sorte de compromis entre les deux extrêmes décrits précédemment; comme il est représenté sur la figure 16, un semi-conducteur possède des niveaux courants au-dessus d'une mince couche de niveaux remplis, qui sont à leur tour au-dessus d'une zone d'absence de niveaux. Les quelques niveaux remplis élevés sont quelquefois appelés « niveaux d'impuretés », parce qu'ils sont présumés contenir, dans quelques substances, les électrons des impuretés présentes.

La conductivité d'un semi-conducteur est en général limitée par le fait qu'il ne peut y avoir que quelques électrons dans les niveaux courants, en partie au moins parce que le réservoir d'impuretés qui les alimente est étroit. Par exemple, dans l'oxyde de cuivre, les niveaux d'impuretés sont ceux qui contiennent les électrons associés avec un excès d'oxygène, c'est-à-dire l'oxygène en surplus de celui nécessaire pour satisfaire la formule chimique Cu^2O.

L'hypothèse de la couche d'arrêt se traduit dans la théorie quantique par l'existence d'une bosse isolante qui apparaît dans la courbe d'énergie potentielle comme le montre la figure 17. Une bosse peut être due soit à une couche isolante matérielle, soit à l'effet d'une charge spéciale négative.

En l'absence de lumière ou de toute tension extérieure appliquée, un contact comme celui illustré par la figure 17 atteint sa condition d'équilibre lorsque le transfert des électrons du semi-conducteur au métal se produit aussi rapidement que le transfert dans l'autre sens.

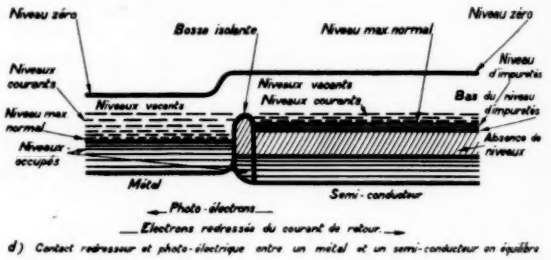


Fig. 17.

Aucun transfert d'électrons à travers la bosse ne peut commencer et finir au même niveau. Soumis à cette limitation, le transfert ne peut prendre place qu'entre les niveaux courants ou occupés jusqu'à un niveau vacant ou courant. Le transfert ne peut pas se terminer dans les niveaux occupés parce qu'aucun autre électron ne peut y être introduit. Le transfert ne peut pas provenir d'un niveau vacant ou d'absence de niveaux parce qu'il n'y a pas d'électrons dans ces niveaux. Le transfert est naturellement impossible au-dessous du bas des niveaux d'impuretés du semi-conducteur.

Au niveau situé juste au-dessus du niveau normal maximum du semi-conducteur, le transfert peut avoir lieu de deux façons, la direction et le taux du transfert à un pareil niveau dépendant de la différence de concentration électronique des deux côtés de la bosse et de l'épaisseur de la bosse à ce niveau. A l'intérieur du niveau d'impuretés rempli, le transfert peut avoir lieu seulement de droite à gauche et à un taux qui est indépendant de la concentration dans les niveaux courants à la gauche de la bosse, mais dépend de l'épaisseur de la bosse.

Dans les conditions d'équilibre représentées (*fig.* 17), les hauteurs relatives des niveaux des deux côtés de la bosse sont telles que le transfert de gauche à droite à travers la bosse entre les niveaux courants est égal au transfert droite à gauche venant des niveaux d'impuretés remplis, de telle façon que le transfert total est nul.

Si une tension extérieure est appliquée qui abaisse tous les niveaux du semi-conducteur, beaucoup plus d'électrons passent de gauche à droite qu'auparavant parce que les niveaux courants les plus bas du semi-conducteur sont déplacés à la hauteur des niveaux courants du métal, de haute concentration. Une fois que les électrons ont pénétré dans les niveaux courants du semi-conducteur, ils peuvent être rapidement déplacés par un champ électrique modéré.

Si, au contraire, une tension extérieure est appliquée qui élève les niveaux du semi-conducteur, les niveaux courants du semi-conducteur se mettent à la même hauteur que les niveaux vacants de l'autre côté de la bosse, de telle façon que seulement le transfert de droite à gauche puisse prendre place, ce qui constitue le courant inverse. Toutefois, ce courant est petit à cause de la faible concentration et ainsi un petit transfert a lieu en provenance des niveaux remplis et courants du semi-conducteur. Le contact offre donc une grande résistance dans ce sens.

Une explication aussi satisfaisante peut être bâtie en supposant que tous les électrons passent au-dessus de la bosse ou qu'ils passent à travers elle (effet de tunnel de Mott [34]). On peut ainsi supposer la bosse infiniment haute dans le dernier cas.

L'explication de l'effet photoélectrique se fait de façon identique. La lumière qui atteint le contact (*fig.* 17) affecte grandement les électrons situés à la hauteur du niveau normal maximum et en dessous dans les deux substances; le comportement photoélectrique observé devient compréhensible, si l'on suppose que le transfert photoélectrique des électrons est le résultat du passage de ces derniers, provenant du niveau normal maximum et du dessous, entièrement au-dessus du sommet de la bosse isolante.

Pour le seuil d'énergie et au juste au-dessus, le travail d'arrachement est suffisant pour soulever les électrons du niveau normal maximum du semi-conducteur et les faire passer au-dessus de la bosse; il n'est pas suffisant pour soulever les électrons du niveau normal maximum du cuivre au-dessus de la bosse. Ainsi seulement le courant photoélectrique électronique peut avoir lieu de droite à gauche comme l'indique l'expérience. Toutefois, si le travail d'arrachement est rendu encore plus grand, à l'extrémité violette du spectre, les électrons peuvent être alors transportés, par l'effet photoélectrique, dans les deux directions, par-dessus la bosse. Dans ce cas les deux taux de transfert opposés deviennent égaux de telle sorte que le courant photoélectrique dans le circuit extérieur tombe à zéro.

Ainsi la théorie quantique rend compte assez simplement des principaux résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Elle donne l'explication et le sens de l'effet redresseur et des seuils antérieur et postérieur de l'effet photoélectrique.

CHAPITRE V.

Utilisation pratique des cellules photoélectriques a couche d'arrêt.

Nous avons vu que le courant de court-circuit d'une cellule photoélectrique à couche d'arrêt est seul proportionnel à l'intensité du flux lumineux incident. Il en résulte que la résistance sur laquelle on fait débiter les couples doit être très faible devant la résistance de la couche d'arrêt. La traduction pratique de cette condition est que, à moins que l'on ne désire mesurer que des flux très petits, la résistance des galvanomètres utilisés doit être aussi faible que possible : on tâche dans les luxmètres photoélectriques bien construits de ne pas dépasser 20 à 30 % de la résistance de la couche d'arrêt, c'est-à-dire 60 à 300 Ω dans le cas de couples au sélénium, 30 à 50 Ω pour les couples à l'oxyde cuivreux. Il en résulte que les mesures à l'électromètre ne peuvent être faites avec les couples. On peut fabriquer, pour un prix très bas, des galvanoscopes à pivot très robuste qui permettent, avec un cadre de 200 Ω d'apprécier aisément 0,5 μA. Adjoints à un couple de sensibilité de 200 μA par lumen, ils sont capables de déceler des variations de flux de l'ordre de 2.10^{-5} lumens.

L'avantage principal d'un couple photoélectrique est dans sa robustesse, sa simplicité et la commodité de son emploi. En particulier, aucune source de tension auxiliaire ne doit être utilisée. Toutefois, la linéarité de la relation entre le courant et le flux n'est pas parfaite, et il en résulte que la précision des mesures que l'on peut faire avec un couple photoélectrique dépasse rarement le centième. Nous avons vu que l'on pouvait facilement obtenir avec les couples photoélectriques une courbe de sensibilité spectrale très voisine de celle de l'œil. Il en résulte

que l'emploi des couples photoélectriques est tout à fait indiqué dans les mesures de photométrie industrielle et dans la mesure des éclairements d'appartement par exemple, où les conditions à exiger de l'appareil de mesure sont précisément la simplicité de l'emploi et l'obtention d'indications comparables à celles de l'œil.

Nous avons vu aussi que, malgré l'absence d'inertie dans le fonctionnement des couples, la présence de la capacité en parallèle avec la résistance de la couche d'arrêt empêche l'utilisation des couples dans les mesures de flux lumineux rapidement variable. En particulier, leur emploi n'est pas possible en télévision.

Le domaine dans lequel les couples photoélectriques ont le plus d'intérêt est dans les relais photoélectriques, utilisés chaque fois que l'on désire commander un circuit électrique ou un dispositif mécanique quelconque à l'aide d'une variation de flux lumineux. En effet, bien souvent le choix du type à employer est déterminé par des considérations d'ordre pratique ou pécuniaire. A ce double point de vue, les cellules photoémissives sont désavantagées par rapport aux couples photoélectriques : elles sont onéreuses et fragiles; le courant qu'elles fournissent doit, en général, être amplifié avant de pouvoir actionner un relais sensible. Au contraire, les cellules à couche d'arrêt sont bon marché : on les utilise toujours là où la constance du réglage dans le temps n'est pas importante.

Par contre, pour les mesures de précision, les variations relativement considérables de la sensibilité des couples photoélectriques en fonction de la température et surtout du temps (effet de fatigue) font que ces appareils ne sont pas d'un emploi très sûr.

Conclusion.

Nous avons étudié les cellules à couche d'arrêt tant au point de vue expérimental qu'au point de vue des théories émises. Dans une introduction, après un bref exposé historique, nous avons montré les deux genres de cellules employées. Après avoir dit quelques mots sur la construction des celulles au sélénium et à l'oxyde cuivreux, nous avons indiqué la sensibilité de ces appareils, la répartition spectrale, ainsi que la variation de la sensibilité en fonction du temps et de la température.

Nous avons ensuite montré que les caractères principaux de l'effet redresseur et photoélectrique pouvaient s'interpréter sommairement à partir d'hypothèses assez simples qui se traduisent par l'existence d'une couche d'arrêt entre le métal et le semi-conducteur, et par l'utilisation d'un circuit électrique équivalent. La démonstration du caractère d'émission électronique, ainsi que la vérification de la relation d'Einstein, a été fournie par les expériences de Liandrat.

Nous avons présenté les théories actuelles de cet effet, la théorie quantique étant celle qui explique le mieux le phénomène d'émission.

Enfin nous avons signalé rapidement les principaux usages des cellules à couche d'arrêt et montré que ces appareils, très indiqués dans tous les cas où la commodité d'emploi prédomine, ne présentent pas encore le degré de linéarité de l'effet et de constance dans le temps nécessaire pour effectuer des mesures de haute précision.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Boutry, *Phénomènes photoélectriques*, 1936, (Librairie Hermann).
2. Nix et Treptow, *Journal of the Optical Society of America*, novembre 1939, p. 457.
3. Brevet hollandais n° 863.035.
4. Brevet allemand n° 862.788.
5. Brevet allemand n° 868.907.
6. Teichmann, *Philosophical Magazine*, février 1937, p. 269.
7. Liandrat, *Revue générale d'Électricité*, mars 1934, p. 417.
8. Auger et Lapicque, *C. R. Acad. Sc.*, août 1931, p. 319.

8 *bis*. Marchal et Marton, *Rev. d'Optique*, janvier 1936, p. 4.

9. Barnard, *Proceedings of the Physical Society*, mars 1939, p. 222.
10. Preston et Dermott, *Proceedings of the Physical Society*, mars 1934, p. 253.
11. Ferencz et Urbaneck, *Rev. d'Optique*, avril 1935, p. 319.
12. Felsinger, *Annalen der Physik*, mai 1937, p. 81.

13. SANDSTRÖM, *Philosophical Magazine*, novembre 1938, p. 906.

14. BONET-MAURY, *C. R. Acad. Sc.*, mai 1937, p. 1641.

15. BECKER et KRUPKE, *Zeits. für Physik*, 1937, p. 474.

16. BERGMANN et PELZ, *Zeits. für Physik*, 1937, p. 177.

17. LANGE, *Physikalische Zeitschrift*, novembre 1931, p. 850.

18. KURTSCHATOW et SINELNIKOW, *Physikalische Zeitschrift der Soviet-Union*, 1, p. 42.

19. BOULLEAU, *C. R. Acad. Sc.*, mars 1936, p. 749.

20. JOFFE, *Semi-conducteurs électroniques*, 1935 (Hermann).

21. BORISSOW, *Physikalische Zeitschrift der Soviet-Union*, 1933, p. 146.

22. Mme ROY-PICHON, *C. R. Acad. Sc.*, juin 1934, p. 2083.

23. SCHOTTKY et WAIBEL, *Physikalische Zeitschrift*, 1932, p. 583.

24. JUSE, *Nature*, 1933, p. 242.

25. WOOD, *Review of Scientific instruments*, 1933, p. 434.

26. LIANDRAT, *Journ. de Physique*, 1934, p. 179.

27. GOOSE, *Ann. der Physik*, 1941, p. 425.

28. LIANDRAT, *Thèse* (*Ann. de Physique*, 1936).

29. SUHRMANN, *Zeitschrift für Physik*, 1929, p. 99.

30. LARSEN et SCHENK, *Journ. of Applied Physics*, août 1940, p. 555.

31. SCHOTTKY, *Angeweiss. Wissenschaft*, janvier 1941, p. 20.

32. TEICHMANN, *Ann. der Physik*, 1932, p. 649.

33. DOW, *Fundamentals of Engineering*, New-York, 1937.

REVUE SOMMAIRE DES PRINCIPAUX ARTICLES PARUS EN LITTÉRATURE SUR LES CELLULES PHOTOÉLECTRIQUES A COUCHE D'ARRÊT.

---

1. FERENCJ et URBANECK, *Variation de la sensibilité d'une cellule photoélectrique à couche d'arrêt* (*Rev. d'Optique*, 14, septembre 1935, p. 317).

Les auteurs ont remarqué que la sensibilité d'une cellule variait avec le temps d'illumination, en lumière blanche et monochromatique. On a remarqué un accroissement du rendement avec le temps pour de basses intensités; on l'a attribué à un retard à l'acquisition de l'équilibre et, avec de fortes illuminations, l'effet de fatigue est observé. Il faut remarquer particulièrement les effets avec la lumière rouge. Une illumination prolongée et intense avec de la lumière blanche produit un changement permanent dans la sensibilité spectrale, quoiqu'il y ait quelque recouvrement à l'obscurité. On obtient des effets identiques en soumettant la cellule à une température de 60° C pendant plusieurs jours. Ces résultats sont discutés en relation avec la sélection et la standardisation de ces cellules pour des fins photométriques.

2. BARNARD, *Compensateur de sensibilité pour les cellules rectifiantes au sulfure de sélénium* (*Proc. Phys. Society*, 48, janvier 1936, p. 163).

L'auteur donne la description d'une recherche sur la perte de sensibilité lorsque l'obliquité de la lumière incidente augmente. Dans le cas où une portion restreinte de la cellule est illuminée, on trouve que la sensibilité augmente lorsque le centre de la surface éclairée se déplace du centre de la cellule. Cela permet une méthode simple de compensation pour une incidence oblique en plaçant un point central à distance convenable au-dessus de la cellule.

3. KÖNIG, *Limites de l'efficacité des cellules à couche d'arrêt au sélénium* (*Helv. Phys. Acta*, 8, 6, 1935, p. 505).

Les mesures indiquent que, dans les régions d'intensité où la loi de proportion n'est pas valable, la déviation à cette loi est la plus petite dans la région bleue du spectre. En utilisant ces cellules, il est recommandé d'éviter les sauts larges d'intensité. On énumère cinq emplois auxquels ces cellules s'adaptent avec le pourcentage de précision dans chaque cas. On en tire deux applications : la comparaison de lumières de couleurs différentes et la mesure de l'intensité de la lumière transmise par un verre coloré.

4. BEHRENDT, *Les effets photoélectriques dans l'oxyde de cuivre* (*Phys. Zeits.*, décembre 1936, p. 886).

L'effet antérieur a été étudié à différentes longueurs d'onde avec des cellules à Cu^2O préparées avec une couche frontale d'or pulvérisé. Le courant photoélectrique et la f. é. m. augmentent jusqu'à une valeur de saturation lorsque l'épaisseur de la couche frontale

augmente. Aucun effet antérieur n'est observé avec un métal en forme de gaze. Les résultats indiquent la probabilité de l'absorption électronique dans le métal. Les expériences ont aussi porté sur des cellules sans couche d'arrêt et l'on a trouvé que pour des cellules de moins de 1 mm d'épaisseur, le courant, pour de faibles résistances extérieures, est indépendant de la présence de ces couches. Les mesures thermoélectriques montrent qu'il n'y a aucune analogie entre la f. é. m. photoélectrique et thermoélectrique dans les cellules à Cu^2O. La théorie de Schottky, sur l'effet photoélectrique dans les semi-conducteurs, est considérée en meilleur accord avec l'expérience que la théorie de la concentration des éléments. On modifie la théorie de Schottky; le changement de conductibilité suivant la direction de la couche d'arrêt doit être remplacée par la considération du parcours de diffusion des électrons dans le semi-conducteur et leur absorption dans le métal. On donne des formules en accord qualitatif avec les observations pour l'effet antérieur et pour l'effet postérieur. On tire de ces formules la dépendance de ces effets vis-à-vis de la température. Ceci a été vérifié expérimentalement.

5. Zenor, *Rrefroidissement d'une surface par l'émission photoélectrique* (*Phys. Rev.*, décembre 1936, p. 1050).

On mesure le refroidissement d'une surface lorsque des photoélectrons quittent cette surface. La surface est une couche mince de cæsium déposée sur du platine. On mesure la différence de température avec un thermocouple fer-nickel. On trouve que l'énergie perdue par la surface concorde à peu près avec celle que l'on peut attendre si l'on suppose que des électrons libérés par l'effet photoélectrique perdent très peu d'énergie par collision ou lorsqu'ils s'échappent.

6. Felsinger, *Irradiation d'une cellule à couche d'arrêt sur des rayons X doux* (*Ann. der Phys.*, mai 1937, p. 81).

L'auteur décrit un appareil utilisé pour l'étude de l'action des rayons X de longueurs d'onde comprises entre 0,5 et 2,5 Å sur des cellules à Cu-Cu_2O et Se. Ces cellules sont montées dans le vide d'un tube à rayons X. Le courant photoélectrique et la f. é. m. des cellules des deux genres sont mesurés en fonction du courant de l'anticathode et de la tension du tube et les résultats expérimentaux sont mis sous forme de graphiques et discutés.

7. Jouse, *Propriétés de la couche rectifiante dans les cellules photovoltaïques* (*Phys. Zeits. der Soviet-Union*, 11, 1, 1937, p. 122).

L'auteur a montré dans un article précédent que l'action des cellules photovoltaïques dépend de l'existence d'une couche de haute résistivité entre le métal et le semi-conducteur. Des couches de natures différentes sont produites artificiellement et éprouvées au point de vue de leur action photoélectrique. On montre que seules sont efficaces les substances qui créent l'effet photoélectrique interne. La courbe de sensibilité spectrale a été mesurée pour différentes cellules. Elle possède en général deux maximums dont l'un est dû à la couche et l'autre caractérise la combinaison métal-semi-conducteur (Cu-Cu^2O). Ces résultats sont discutés.

8. Bergman et Peltz, *Cellules photoélectriques rectifiantes au sélénium* (*Zeits. für technische Phys.*, 18, 7, 1937, p. 177).

Des spécimens de deux types de cellules au sélénium à couche d'arrêt (appelées types H et K) faits par le même constructeur ont été exposés, court-circuités, à l'action des intensités allant jusqu'à 4 500 lux, pendant 24 jours. La f. é. m. photoélectrique croît de 10 à 20 % pendant cette période, l'accroissement étant plutôt plus grand pour le type à haute résistance (type H); mais le courant de court-circuit croît seulement de 2 à 4 %. Dans une bande de température comprise entre — 180° et 100°, le maximum de la f. é. m. correspond à — 50° (type K) et — 25° (type H). Dans la bande pratique de — 20° à + 30°, le coefficient de température de la f. é. m. photoélectrique est — 0,003 et celui du courant de court-circuit + 0,001. On étudie la variation de la résistance de la couche d'arrêt avec la température dans les deux directions. Le courant et la f. é. m. photoélectriques augmentent tous deux, quand l'aire d'illumination décroît, le flux d'illumination restant constant, mais l'effet varie avec la longueur d'onde et le type de cellule. Le retard dans l'établissement du courant varie avec la longueur d'onde, l'intensité de la lumière incidente, la température et l'aire de la surface illuminée.

9. Görlich, *Nature de la couche d'arrêt dans les cellules au sélénium* (*Zeits. für Phys.*, 106, 1937, p. 373).

L'auteur montre que le dépôt de l'électrode par pulvérisation cathodique donne des cellules plus sensibles que par évaporation du métal dans le vide. Des expériences postérieures ont montré que des oxydes de sélénium et des atomes de gaz absorbés étaient présents dans le sélénium en couches minces ou en pièces. L'épaisseur de l'électrode métallique avec laquelle la sensibilité est maximum est plus grand dans les cellules où le sélénium est recuit dans l'azote, que dans celles où il a été recuit à l'air.

10. Perucca et Deaglio, *La couche d'arrêt et l'effet photoélectrique Hallwach* (*Acad. Scien. Terino Atti*, 72, Disp. 3 *a*, avril-octobre 1937, p. 500).

On exprime la dépendance de la f. é. m. de saturation d'une cellule à Cu^2O ou Se en fonction de la

fréquence de la lumière d'excitation. Cette dépendance est linéaire d'après la théorie des auteurs qui lie l'effet photoélectrique de la couche d'arrêt à l'effet Hallwach. La pente de la droite n'est pas en accord avec la relation d'Einstein. La cause probable de cette divergence est discutée.

11. Brice, *Circuit de compensation pour les cellules à couche d'arrêt* (*Rev. Scient. Inst.*, août 1937, p. 279).

L'auteur décrit un circuit de compensation comprenant deux cellules à couche d'arrêt en parallèle avec un galvanomètre et un rhéostat-potentiomètre. L'analyse du circuit montre qu'une échelle uniforme liée au rhéostat-potentiomètre peut être utilisée pour fournir la transmission (ou la réflexion) de la lumière à travers un échantillon, si la résistance du potentiomètre et les résistances internes en série des cellules sont petites par rapport aux résistances internes en dérivation. Les performances du circuit, dans diverses conditions, sont attestées au moyen d'écrans filiformes de transmission connue. Avec une illumination modérée et en utilisant un potentiomètre de 50 Ω avec une échelle graduée de 0 à 100, pour la transmission, les erreurs ne dépassent pas ± 1 % de cette échelle.

12. Nix et Treptow, *Cellule à f. é. m. photoélectrique au sulfure de thallium* (*Journ. of the Optical Society of America*, novembre 1939, p. 457).

On obtient un effet de f. é. m. photoélectrique dans le Tl^2S par sulfurisation partielle d'un disque de thallium ou d'une couche de thallium évaporé. L'effet de photosensibilité atteint 6 mA : lumen. La tension en circuit ouvert et le courant de court-circuit ont été observés tous les deux dans certaines cellules, ils sont proportionnels à l'intensité de la lumière incidente pour toutes les températures. Pour d'autres cellules, surtout celles qui fournissent une réponse élevée, ces deux quantités tendent vers la saturation pour les hautes intensités lumineuses. La courbe de sensibilité spectrale possède un maximum vers 9 800 ± 200 Å, le seuil inférieur étant à 6 500 Å et le seuil supérieur à 1 500 Å. Le courant de court-circuit augmente lorsque la température diminue jusqu'à — 45°, puis décroît graduellement jusqu'à — 180° C. La position du maximum varie légèrement d'une cellule à l'autre. Le rendement de la cellule mesuré en fonction de la fréquence des interruptions de la lumière incidente montre une baisse de 75 % à 20 000 cycles : s.

13. Sandström, *Variations dans la résistance interne de la couche d'arrêt des cellules au sélénium par exposition à la lumière* (*Phil. Mag.*, décembre 1939, p. 642).

En exposant, pendant plusieurs heures, des cellules à couche d'arrêt au sélénium à la lumière ou aux rayons X, la résistance des cellules diminue. Cette diminution est de l'ordre de 20 % et dans la bande des observations le pourcentage de décroissance est le même pour toutes les tensions. Lorsque l'on supprime la source lumineuse, la valeur première de la résistance est de nouveau obtenue dans un espace de temps de 10 mn. L'auteur étudie l'effet pour diverses cellules avec divers types de sources lumineuses.

14. Verleger, *L'effet photoélectrique et ses applications aux cellules photoélectriques* (*Zeits. für Inst.*, octobre 1939, p. 396-515).

L'auteur donne un compte rendu des principes, de la construction moderne et du comportement des cellules (sensibilité, réponse à l'intensité et la longueur d'onde, limites des longueurs d'onde, inertie, fatigue et réponse à la fréquence). Il donne quelques applications des emplois les plus usités : type au sélénium à résistance, cellules à couche d'arrêt, cellules à vide et à gaz. Pour de faibles intensités, on peut utiliser l'amplification et des circuits typiques sont donnés pour divers buts. On décrit la multiplication des courants photoélectriques par émission secondaire et les types d'électrons multiples sont désignés à cet effet. On donne un bref compte rendu du compteur de photons du type Jeiger.

15. Campbell, Palmer et Winch, *Exactitude des cellules photoélectriques rectifiantes* (*Proc. of the Phys. Society*, novembre 1938, p. 934).

L'auteur a étudié l'effet d'une résistance en série R dans une cellule photoélectrique sur la linéarité de la réponse et sur le coefficient de température de la sensibilité. Afin qu'aucune restriction ne soit apportée à R, par la sensibilité effective, on mesure le courant photoélectrique à l'aide d'une méthode de compensation. La source lumineuse utilisée dans les expériences est fournie par une lampe à vide à filament de tungstène opérant à peu près à 2 400° K. Le coefficient de température de la cellule est toujours le plus petit lorsque $R = 0$, mais il n'est généralement pas nul dans ces conditions. On s'approche le plus de la linéarité, en général pour une valeur finie de R qui est habituellement comprise entre 100 et 1 000 Ω. Mais aucune valeur de R n'évite des erreurs de 1 ‰, lorsque l'on considère la linéarité entre 0 et 240 lux. Les observations peuvent être expliquées qualitativement, mais pas complètement, en supposant la présence d'une résistance en série à l'intérieur de la cellule ajoutée à la résistance shunt. Ces deux résistances ne varient pas de la même manière avec la température et l'illumination. Quelques conclusions pratiques sont données dans le paragraphe final.

16. Kolomiej, *L'effet photoélectrique avec couche d'arrêt positive* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 19, 5, 1938, p. 383).

L'auteur décrit l'action d'une cellule à plan d'arrêt. Il trouve que les cellules à Th S où ce composé est

dans un état de conductivité électronique, présente un plan d'arrêt, mais avec un signe inverse; les électrons passent du métal dans le semi-conducteur en le chargeant négativement. Dans des conditions analogues, les mêmes cellules ont une sensibilité dix fois plus grande que celle des cellules au sélénium. La f. é. m. atteint 0,3 V. La dépendance du courant de court-circuit et de la f. é. m. avec illumination ne diffère pas de celle des cellules à Se et Cu^2O, tandis que la sensibilité spectrale est la même que celle des thalofides.

17. Schweickert, *Cellules photoélectriques au sélénium* (*Zeits. für Phys.*, 1938, p. 413).

Les mesures de résistances et de capacités sur les cellules photoélectriques au Se indiquent la présence d'une couche d'arrêt dont les propriétés déterminent les performances de la cellule. Contrairement aux suppositions d'autres chercheurs, l'auteur montre que la résisfance de la couche d'arrêt ne dépend pas de l'illumination et cela rend possible la détermination de la distribution d'énergie des photoélectrons pénétrant dans l'électrode antérieure. Des mesures de la distribution spectrale pour des illuminations intermittentes et des tensions diverses ne confirment pas les résultats de Liandrat (*Thèse*, 1935). Dans le courant de court-circuit, le rendement quantique dépasse 0,5 mais est inférieur à l'unité. Des quantités même petites de vapeur de mercure réduisent la sensibilité des cellules, probablement en affectant la couche d'arrêt.

18. Davydov, *Force électromotrice photoélectrique dans les semi-conducteurs* (*Techn. Phys. U. R. S. S.*, 1938, p. 79).

L'auteur explique les valeurs observées de la f. é. m. en supposant que les semi-conducteurs contiennent des charges libres des deux signes, c'est-à-dire des électrons libres et des cavernes. En ce cas, le problème conduit à un système d'équations de diffusions, résolubles aisément pour de faibles illuminations. Si la résistance du contact éclairé est élevée, la f. é. m. est, pour de faibles éclairements, proportionnelle à ces derniers. Une f. é. m. considérable peut apparaître seulement dans deux cas :

1° quand les concentrations obscures des électrons libres et des cavernes sont comparables;

2° quand la lumière naît des charges libres d'un signe différent de l'agitation thermique. Si la résistance au contact n'est pas grande, la f. é. m. a pour de faibles illuminations un effet quadratique. Les résultats de Landau et Lifschitz ne sont pas toujours exacts.

19. Fischer, Gudden et Treu, *Détecteur lumineux à galène* (*Phys. Zeits.*, février 1938, p. 127).

On donne un compte rendu de recherches de la f. é. m. produite en éclairant le contact entre un pont métallique et PbS. Des mesures sont faites sur la variation de cet effet avec la tension appliquée, la fréquence d'interruption de la lumière, la température, la longueur d'onde de la lumière incidente et la pression de contact. Quelques expériences ont aussi porté sur des électrodes en or déposé par évaporation. On en conclut que, à l'effet photoélectrique qui est sans inertie, s'ajoute un effet thermoélectrique; c'est cela qui explique les divergences de vue qui existent dans les différents travaux.

20. Teichmann, *L'effet photoélectrique à couche d'arrêt observé avec l'oxyde de cæsium* (*Phil. Mag.*, février 1937, p. 269).

On décrit les expériences qui indiquent que, dans les cathodes à CsO photosensibles, les effets de la couche d'arrêt existent dans les couches intermédiaires; les électrons sont libérés à ces endroits et transportés vers la surface extérieure où ils sont libérés par l'effet photoélectrique externe.

21. Becker et Kruppke, *Action des rayons cathodiques sur les cellules au sélénium* (*Zeits. für Phys.*, 1937, p. 474).

Ces auteurs ont employé des rayons cathodiques à la place de la lumière pour exciter des cellules photoélectriques. La variation du courant photoélectrique avec le courant de bombardement a été mesurée pour deux énergies différentes de bombardement : 5 et 20 eV. La variation n'est pas linéaire, le courant photoélectrique croît beaucoup moins que le courant de bombardement. On étudie aussi la variation pour des énergies allant jusqu'à 40 eV; les courbes montrent d'abord un rapide accroissement, puis un large maximum suivi d'une lente décroissance. Une correction a été faite, qui tient compte de la perte d'énergie des électrons de bombardement par passage à travers une électrode. Les auteurs concluent qu'une partie des photoélectrons (provenant d'une couche de sélénium de faible épaisseur) atteint l'électrode, le reste étant perdu par absorption. Ils suggèrent que les cellules photoélectriques peuvent être développées de façon à mesurer les courants de rayons cathodiques.

22. Marchal et Marton, *Propriétés des cellules photoélectriques à couches d'arrêt au sélénium* (*Rev. d'Optique*, janvier 1936, p. 1).

Les auteurs utilisent une cellule photoélectrique Weston corrigée par un filtre, pour la courbe de sensibilité spectrale de l'œil. Ils étudient la déviation à la loi de proportionnalité entre courant et éclairement pour des éclairements allant de 0,2 à 10 lux. Le rapport du courant à l'éclairement varie de 20 ‰ dans cette bande de lumière blanche. Lorsqu'on utilise la lumière colorée, la déviation trouvée est plus petite avec de la lumière rouge qu'avec de la lumière bleue ou verte, donnant lieu à une sorte d'effet Purkinje.

Un excès d'éclairement de 5 lux donne un courant qui accuse une diminution continue avec le temps, différentes cellules ayant même marque présentant de grandes différences sous ce rapport. On trouve que cet effet de fatigue augmente avec l'intensité lumineuse et il est recommandé que pour obtenir des résultats faciles à reproduire, un éclairement de 25 lux ne doit pas être dépassé. Les auteurs ont mesuré aussi les effets obtenus en interrompant l'éclairage toutes les minutes.

23. Roulleau, *Couche d'arrêt en photoélectricité* (*C. R. Acad. Sc.*, 202, février 1936, p. 470).

En cette brève note, l'auteur montre que les propriétés rectifiantes et photoélectriques des cellules à Cu_2O sont indépendantes de la résistance spécifique de la masse de Cu_2O, mais augmentent toutes deux avec la résistance de contact de la couche. Les objections suivantes ont été faites : les redresseurs à Cu_2O ont pu être construits sans avoir de propriétés photoélectriques et inversement on a pu employer des cellules photoélectriques qui n'étaient pas rectifiantes. Ils expliquent que ces objections qui ne sont pas fondamentales sont dues à des effets perturbateurs.

24. Roulleau, *Effet de la température sur les cellules rectifiantes à* Cu_2O (*C. R. Acad. Sc.*, 202, mars 1936, p. 749).

L'auteur porte en ordonnée le rendement photoélectrique ε d'un nombre de cellules à Cu-Cu^2O en fonction de la résistance R du contact entre les deux couches et trouve la variation de la courbe avec la température. Lorsque la température augmente, les courbes sont déplacées dans la direction d'un accroissement de ε sans changement de la forme des courbes. Le déplacement n'est pas proportionnel à la température et aux températures ordinaires il est de 1 ‰ de ε par degré centigrade. Dans toutes les cellules, la variation de ε avec la température est une fonction de R et cela explique le grand écart de coefficients de température observé dans des cellules de ce type.

25. Landau et Lifschitz, *Théorie de la f. é. m. photoélectrique dans les semi-conducteurs* (*Phys. Zeits. der Soviet-Union*, 1936, p. 477).

On calcule la f. é. m. apparue dans un circuit renfermant un semi-conducteur éclairé d'un seul côté. Deux cas sont considérés; un semi-conducteur avec électrons de conduction et un semi-conducteur avec électrons de conduction et cavernes.

26. Kronhaus, *Action des rayons X sur une cellule à couche d'arrêt à* Cu_2O *dans le vide* (*Phys. Zeits. der Soviet-Union*, 1936, p. 461).

Une cellule à couche d'arrêt à Cu_2O excitée par des rayons X donne une f. é. m. proportionnelle à l'intensité. Jusqu'à présent, la difficulté de l'utilisation des cellules de ce genre pour mesurer les rayons X a été l'effet de vieillissement graduel. Il réduit de moitié la sensibilité en deux ou trois mois. Le présent article donne les résultats des essais faits pour éliminer ce changement graduel. On obtient un résultat peu satisfaisant en couvrant la cellule avec une couche de surface transparente. En plaçant la cellule dans un vase purgé, on trouve que la sensibilité est réduite à la fois pour les radiations visibles et les rayons X, mais aucun effet de vieillissement appréciable n'a pu être détecté après un mois.

27. Lifschitz, *Effets photoélectriques dans les semi-conducteurs* (*Phys. Zeits. der Soviet-Union*, 1936, p. 641).

L'auteur et Laudau [25] ont calculé la f. é. m. dans un circuit contenant un semi-conducteur éclairé d'un seul côté. On traite ici, de façon semblable, le cas d'un champ magnétique dans un semi-conducteur. On cherche tout d'abord la fonction de distribution et la f. é. m. pour un semi-conducteur possédant des électrons de conduction; on étudie ensuite le même effet dans un semi-conducteur contenant des cavernes conductrices ainsi que des électrons de conduction.

28. Liandrat, *Phénomènes photoélectriques aux surfaces limites des semi-conducteurs* (*Ann. de Physique*, octobre 1936, p. 391).

Considérant les connaissances existantes et les expériences décrites ici, l'auteur prétend que le comportement d'une cellule rectifiante peut être pleinement expliqué comme suit : des photoélectrons traversent la couche d'arrêt avec une énergie cinétique dont la valeur maximum est en accord avec la relation d'Einstein. Ils proviennent du semi-conducteur; le rendement est élevé, car les électrons libérés très profondément dans le semi-conducteur peuvent atteindre la surface sans perte de beaucoup d'énergie. Les modifications secondaires de la conductivité de la couche d'arrêt sont expliquées par la présence des électrons arrêtés là par le champ électrique opposé qui s'y trouve établi. Il n'est pas possible de rendre compte de l'effet par un effet direct primaire, effet photoélectrique interne provenant de la couche d'arrêt. L'augmentation de l'émission photoélectrique avec un champ accélérateur est probablement due à une diminution du travail de sortie plus ou moins analogue à l'effet Schottky.

29. Sundlach, *Caractéristiques de fréquence des cellules photoélectriques rectifiantes* (*Arch. für Elek.*, octobre 1936, p. 625).

On compare le rendement d'une cellule rectifiante et celui d'une cellule d'émission, sous des éclairements de même période. Des observations indépendantes des caractéristiques de fréquence de l'amplificateur, sont

faites jusqu'à 4 000 p. Les caractéristiques de fréquence, aussi bien que la réponse à la lumière, sont améliorées par la superposition d'un courant direct dans la direction de la barrière. Cela s'explique par l'action du courant direct sur la résistance et la capacité de la couche d'arrêt.

30. König, *Mesures balistiques sur les courants des cellules à couche d'arrêt au sélénium* (*Helv. Phys. Acta*, 1936, p. 602).

On mesure les courants des cellules rectifiantes au sélénium en observant l'aiguille du galvanomètre lorsque la cellule est éclairée, le galvanomètre étant légèrement surchargé. On prétend, par cette méthode, faire des comparaisons d'intensités faciles à reproduire, indépendamment de l'histoire immédiatement antérieure de la cellule. Des mesures ont été faites dans ce sens, sur les caractéristiques des intensités de courant et sur les courants obtenus lorsqu'on superpose les intensités de diverses longueurs d'onde.

31. Goose, *Comportement des cellules photoélectriques au sélénium en H. F.* (*Zeits. für Phys.*, 5, 6, 1939, p. 334).

Becker [33] a auparavant traité du comportement des cellules au sélénium avec des différences de potentiels continues appliquées. Le présent travail est consacré à leur comportement dans des champs à H. F. On explique ce comportement en H. F. par le circuit électrique équivalent. L'effet presque momentané de la couche isolante avec le maximum spectral dans le jaune vert ne se retrouve plus en H. F. quand vient à jouer le phénomène sur la base matérielle, le sélénium dans ce cas. La variation lente due à l'éclairement a son maximum dans le rouge-infrarouge. Des données expérimentales sont fournies, en ce qui concerne les variations avec le temps, la distribution spectrale, l'intensité lumineuse et la température. On donne des analogies avec le comportement de ZnS. Les effets sont expliqués par les variations de résistance et de capacité de la base matérielle du semi-conducteur et les propriétés d'une cellule particulière peuvent être dérivées de son circuit équivalent. Le comportement dans un circuit H. F. peut être expliqué par le diagramme vectoriel. Il est possible de déterminer la capacité inconnue en parallèle et, de là, obtenir une valeur de la constante diélectrique du semi-conducteur.

32. Dubovov, *Progrès dans la formation d'une cellule à couche d'arrêt* (*Journ. of Exp. and the Phys., U. R. S. S.*, 1939, p. 284).

L'auteur décrit des expériences sur les propriétés des couches d'arrêt au sulfure de sélénium et trouve que leurs caractéristiques sont semblables à celles des éléments à Cu_2O et sélénium. Le mécanisme de l'effet est discuté et l'on conclut que la couche d'arrêt est du sulfure cristallin et que la fatigue de l'effet est d'origine thermique.

33. Becker, *Cellules au sélénium. Relation entre courant et tension* (*Zeits. für Phys.*, 1939, p. 629).

L'auteur fait une recherche systematique des relations entre le courant et la tension pour une cellule à Se sous diverses conditions : soit en rapport avec la lumière incidente, soit avec la température. Les diagrammes courant-potentiel sont d'abord donnés pour la température normale, ce qui montre clairement l'effet de l'intensité d'éclairage et aussi de la longueur d'onde. On trouve que, à la température de l'air liquide, les cellules à Se sont seulement sensibles à la lumière rouge et infrarouge.

34. Mott, *Théorie des cristaux rectifiants* (*Proc. of the Roy. Soc.*, mai 1939, p. 27).

Dans les théories existantes de l'action d'un cristal rectifiant, on suppose qu'il y a entre le semi-conducteur et le métal une barrière de potentiel à travers laquelle les électrons pénètrent par l'effet de tunnel. On montre que ces théories donnent un redressement au sens opposé du sens observé. Une autre théorie est proposée; la nature de la couche d'arrêt est discutée et l'on suppose que les électrons doivent être excités thermiquement pour qu'ils puissent passer au-dessus de la barrière au lieu de passer à travers elles. On observe un bon accord avec l'expérience.

35. Mott, *Cellules photoélectriques* Cu-Cu_2O (*Roy. Soc. Proc.*, juin 1939, p. 281).

L'article est une interprétation du comportement de cellules Cu-Cu_2O aux termes d'une théorie de contact entre semi-conducteur et métal exposée précédemment.

36. Görlich, *Courbes de sensibilité spectrale d'une cellule à couche d'arrêt* (*Zeits. für Phys.*, 1939, p. 490).

On a comparé les courbes mesurées à celles qui ont été données antérieurement par d'autres chercheurs. On a préparé des cellules avec une couche photosensible de Cd Se, elles ont une sensibilité maximum de 540 m μ comparée à 560-590 m μ pour des cellules normales. Par un procédé de formation convenable, le cadmium peut être appliqué de façon à produire des centres de perturbation dans la couche de Se et ainsi la sensibilité globale est accrue et un nouveau maximum d'intensité auxiliaire apparaît à 710 m μ.

37. Barnard, *Sensibilité spectrale des cellules rectifiantes au sélénium* (*Proc. Phys. Soc.*, mars 1939, p. 222).

L'auteur montre que la courbe de distribution spectrale de la sensibilité de la cellule au sélénium est déterminée par la résistance extérieure du circuit, le rendement et la température. De plus, la forme de

la courbe de sensibilité et de rendement est donc déterminée par la qualité de la lumière incidente, la résistance du circuit extérieur et la température. De plus, les coefficients de température, de sensibilité sont déterminés par la résistance extérieure et à un plus faible degré par la qualité de la radiation incidente.

38. Görlich, *Influence de l'électrode matérielle sur la sensibilité des cellules rectifiantes au* Se (*Zeits. für Phys.*, 1938, p. 23).

L'auteur a choisi un nombre de métaux divers pour les électrodes transparentes de ces cellules, en les déposant par évaporation ou pulvérisation. Des résultats on en conclut que : l'introduction de « centres d'excitation » convenables dans le film de Se conduit à une sensibilité accrue. Un tel accroissement est établi pour les « centres d'excitation du cadmium ».

39. Sandström, *Action des rayons X doux sur les cellules à couche d'arrêt au* Se (*Phil. Mag.*, novembre 1938, p. 906).

En ce qui concerne le courant et la tension photoélectriques, les éléments à couche d'arrêt au sélénium soumis à un flux de rayons X doux de longueur d'onde comprise entre 3,5 et 20 Å répondent exactement comme à la lumière visible. Pour de faibles intensités, un élément accusait un net écart avec la ligne droite de l'intensité du courant. Exposée à des rayons X doux, la résistance d'arrêt a été trouvée variant d'une façon difficilement calculable. Les courants photoélectriques sont trop petits pour permettre aux éléments d'être utilisés pour des mesures d'intensité dans une radiation spectrale.

40. Sewig, *Photométrie avec les cellules rectifiantes* (*A. T. M.*, 71, mai 1937).

L'auteur décrit les caractéristiques des cellules rectifiantes, en particulier en ce qui concerne l'emploi de ces cellules en mesure de photométrie.

L'exposé donne :

1° Les effets de la variation de la résistance extérieure du circuit ;

2° Le désaccord à la loi de proportionnalité aux très hauts et très faibles éclairements ;

3° Les effets des rayons et infra-rouges ;

4° La déviation de la loi en cosinus de l'éclairement ;

5° Les erreurs dues aux variations de température.

En conclusion, l'auteur donne différentes formes de circuits employés en photométrie avec ces cellules et, en particulier, les diverses formes de compensation des circuits.

41. Mott, *Contact entre un métal et un semi-conducteur* (*Cambr. Phil. Soc. Proc.*, octobre 1938, p. 568).

Quand un semi-conducteur est placé en contact avec un métal, une double couche électrique y est établie, soit entre le métal et le semi-conducteur lui-même. L'ouvrage nous donne une méthode mathématique pour trouver la largeur de la double couche sous certaines hypothèses. On discute les résultats dans le cas du contact NaCl-Na et Cu_2O-Cu.

42. Schottky, *Théorie de la couche d'arrêt* (*Zeits. für Phys.*, 1939, p. 367).

Une nouvelle théorie de la conduction unipolaire à la surface métal-semi-conducteur est développée dans l'article où l'on ne considère plus le semi-conducteur comme une électrode à faible pouvoir émissif d'un arrangement de diode avec électrodes séparées par une barrière de potentiel, mais comme analogue au vide d'un tube électronique un gaz électronique de densité uniforme étant charrié entre les deux électrodes métalliques. Pour une couche d'épaisseur plus grande, on remplace l'analogie avec le vide, par l'analogie avec un espace contenant de la vapeur chaude de Na compris entre deux électrodes à pouvoir thermique émissif. On montre qu'il se forme une couche à charge d'espace qui offre une résistance au passage des électrons, mais qui disparaît lorsqu'on renverse la polarisation.

43. Smith, *Emploi en photométrie des cellules à couche d'arrêt* (*Rev. of Scient. Inst.*, novembre 1936, p. 433).

Lorsqu'on emploie une cellule pour mesurer l'intensité de la lumière incidente, des erreurs peuvent naître qui dépendent de la direction du vecteur électrique par rapport au plan d'incidence. On donne des courbes qui montrent que ces erreurs peuvent atteindre 30 %.

44. Goose, *Semi-conducteurs sensibles à l'action d'une électricité d'origine lumineuse et résistance dans un circuit oscillant électrique* (*Ann. der Phys.*, 1941, p. 425).

On constate, qu'en H. F., la couche isolante est inefficace. Seules subsistent la résistance et la capacité au sélénium. La résistance est comprise entre 100 et 1 000 Ω. La résistance et la capacité varient lorsqu'on éclaire la substance. En montant en série la cellule avec une capacité C', on peut diminuer à volonté l'amortissement. On peut construire le schéma du vecteur dans le plan complexe formé par les deux réactances. Cela permet de déterminer, à l'aide des diagrammes d'impédance, la capacité et la résistance interne. Pour une cellule au sélénium, qui, dans l'obscurité, possède une résistance $R_{Se} = 1000\,\Omega$ et possède en moyenne pour la capacité parallèle $C_{Se} = 2\,000\ \mu\mu$ F. On trouve, lorsqu'on éclaire à 1 000 cycles pour $R_{Se} = 500\,\Omega$ et pour $C_{Se} = 7\,500\ \mu\mu$ F. Ces considérations permettent de remarquer, dans le domaine des ondes courtes, que les phénomènes remarqués sur le comportement des cellules sont une conséquence du circuit équivalent. On constate que la constante diélectrique d'un semi-conducteur varie avec l'éclairement.

45. *Comportement électrique et optique des semi-conducteurs* (*Ann. der Phys.*, 1940, p. 84).

On trouve que, dans la plupart des cas, la résistance augmente comme pour les métaux avec la température, mais de façon non linéaire. Lorsque la conductibilité est très faible, la résistance décroît lorsque la température croît, mais sans vérifier la formule :

$$\sigma = ae^{-\frac{b}{kT}}.$$

46. Dow, *Cellules à couche d'arrêt. Semi-conducteurs* (*Fundamentals of Engineerings*).

L'auteur décrit le comportement et la composition d'une cellule photoélectrique à couche d'arrêt. Il donne le diagramme des niveaux d'énergie dans les métaux et les semi-conducteurs. La présence de la couche d'arrêt due soit à une zone d'impuretés, soit à l'effet de la charge d'espace se traduit par une bosse isolante séparant les deux niveaux. A partir de ces diagrammes, l'auteur peut expliquer l'effet de redressement et l'effet photoélectrique, y compris la présence des seuils inférieurs et supérieurs. L'auteur donne ensuite le schéma électrique classique d'une cellule à couche d'arrêt, le générateur étant supposé être essentiellement un générateur à courant constant. Il s'ensuit que le courant de court-circuit est proportionnel au flux incident, tandis que la tension en circuit ouvert s'écarte de la linéarité en raison de la baisse de la résistance interne avec le flux lumineux. L'auteur termine en indiquant que le rendement (en courant) d'une cellule à couche d'arrêt est légèrement supérieur à celui d'une cellule d'émission à gaz.

47. Roulleau, *Influence de la résistance de contact sur les propriétés rectifiantes et photoélectriques des couches d'arrêt* (*Ann. de Physique*, 8, septembre 1937).

Dans son introduction, l'auteur rappelle le rôle joué par la couche d'arrêt dans le comportement des cellules redresseuses et photoélectriques. Il opère sur Cu_2O mieux connu que le sélénium. L'auteur rappelle les procédés de fabrication des cellules à Cu_2O et la mesure des résistances de contact. Il indique les divers facteurs dont dépendent les résistances de contact. Celles-ci décroissent avec le temps et baissent avec la température comme un semi-conducteur. L'action des réducteurs ne semble pas être grande, alors que celle des oxydants est considérable. L'état cristallin de la masse de Cu_2O est nécessaire pour obtenir des effets, mais la grosseur des cristaux n'influe pas. L'auteur étudie ensuite la variation du photo-potentiel en fonction de la résistance de contact et celle du pouvoir redresseur. Il en déduit que le fait des variations de ces quantités avec la température ne présente que des anomalies apparentes. Enfin, ces dernières sont indépendantes de la résistivité de Cu_2O. L'auteur termine en fournissant deux théories des couches d'arrêt. La première, celle de Joffé, relative à une interprétation quantique du phénomène et la seconde, celle de Teichmann, qui suppose, au contraire, un nombre de contacts localisés en certains points privilégiés du réseau cristallin de Cu_2O. L'auteur conclut, en critiquant l'hypothèse de la couche d'arrêt telle qu'elle est envisagée (10^{-5} cm) et souligne, toutefois, qu'un certain nombre de faits qualitatifs peuvent être expliqués en se basant simplement sur les propriétés des semi-conducteurs.

48. Larsen et Shenk, *Mesures des températures à l'aide des cellules à couches d'arrêt* (*Journ. of Applied Phys.*, août 1940, p. 555).

L'auteur de l'article utilise le fait que le courant photoélectrique dépend de la température du corps noir émissif (loi de Richardson). La cellule photoélectrique agit comme un pyromètre. Ces cellules sont intéressantes parce que leur réponse aux variations d'intensité est rapide et parce qu'elles couvrent une large échelle de température. Enfin, elles ont l'avantage de la robustesse et sont bon marché. Mais elles sont limitées par leur coefficient de température et l'effet de fatigue.

49. Bonet-Maury, *Utilisation de photoéléments à couche d'arrêt pour les mesures radioactives* (*C. R. Acad. Sc.*, 204, 31 mai 1937, p. 1641).

L'auteur constate que les photoéléments irradiés par les rayons α ou β donnent naissance à un photopotentiel comme les photons; les rayons ne donnent pas de résultats dans les mêmes conditions. On peut faire agir les rayons de deux façons :

1° Action après interposition d'un écran de ZnS.
2° Action directe sur photoélément.

50. Joffe, *Semi-conducteurs électroniques* (*Actualités scient. et industr.*, Librairie Hermann).

L'auteur développe, aux termes des théories quantiques, le comportement des semi-conducteurs et leurs propriétés. Un chapitre est consacré aux éléments à couche d'arrêt.

51. Liandrat, *Contribution à l'étude des photoéléments à couche d'arrêt* (*Journ. de Physique*, avril 1934, p. 179).

Les théories proposées pour rendre compte du fonctionnement des cellules photoélectriques à « couches d'arrêt » au moyen de la représentation de Auwers et Kirschbaum n'ont pas été toujours conformes à l'expérience. Cela tient à ce que l'on n'a jamais tenu compte de l'effet de photoconductivité. L'auteur montre que l'on peut ainsi expliquer certaines anomalies (effet de couleur) sans pour cela renoncer à l'hypothèse d'un générateur à courant constant. Enfin, il donne le diagramme d'impédance de deux éléments de contact mis bout à bout, lequel tient compte de l'effet postérieur. Ce diagramme permet d'expliquer certaines anomalies.

RELATION ENTRE LES DÉFAUTS DE RÉALISATION DES LENTILLES ET LA NETTETÉ DES IMAGES

PAR F. BERTEIN,

Agrégé de physique, Ingénieur au laboratoire de Recherches optique électronique
de la Compagnie générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *C'est en grande partie à l'optique lumineuse que l'optique électronique doit ses rapides progrès; ses lois et les instruments qui les appliquent mettent bien en évidence le parallélisme exploité au maximum, entre la nouvelle science et son modèle plus ancien. Si une telle façon d'envisager le problème est fructueuse, il importe toutefois de ne pas s'y limiter sous peine de laisser échapper certains aspects importants qui semblent provenir du caractère suivant : les phénomènes électroniques, contrairement à ce que l'on observe chez les phénomènes lumineux,* sont sensibles à des facteurs d'action très variés. *Les trajectoires n'y présentent pas la rigidité offerte par les rayons ordinaires en dehors des milieux réfringents; elles sont modifiées par les champs électromagnétiques en raison de la nature même des particules qui les définissent.*

Les lentilles, de leur côté, ne jouissent pas de l'immuabilité des lentilles de verre; elles sont sensibles aux fluctuations des tensions ou des intensités de courant qui leur sont fournies. Il existe, d'autre part, des imperfections négligeables chez le microscope optique (défauts de forme des lentilles, etc.), mais qu'on ne pourra considérer comme telles chez l'instrument électronique : l'existence même de la très grande finesse de résolution de ce dernier, conduit nécessairement à être beaucoup plus exigeant à son égard.

On voit ainsi, que d'une façon générale, les instruments électroniques sont sujets à des sources d'aberrations sensiblement plus nombreuses que les appareils d'optique classiques. Mais on peut dire également qu'ils présentent une souplesse plus grande et l'on peut construire de façon simple, des systèmes dont les équivalents en verre seraient irréalisables.

L'étude actuelle envisagera ces aspects originaux de l'optique électronique. Nous prendrons le cas des systèmes centrés, c'est-à-dire présentant en principe, une symétrie de révolution autour d'un axe. Après avoir rappelé tout d'abord la structure générale du champ électromagnétique statique, *nous chercherons à voir* comment se reflètent les imperfections de l'instrument sur le champ résultant. *Les lois des trajectoires électroniques nous fourniront alors les* aberrations optiques du système *et montreront également la* possibilité de corriger *ces dernières, du moins en partie.*

PLAN.

Introduction. Structure des champs statiques.

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires des champs électromagnétiques statiques φ dans le vide; il est commode d'adopter des coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme (s, z) où $s = re^{i\theta}$ représente l'affixe des points dans les plans transversaux. On souligne, en premier lieu, la décomposition de φ en fonctions élémentaires sinusoïdales en θ, de divers ordres de symétrie autour de Oz [éq. (1)], la connaissance de chacune d'elles étant équivalente à celle d'une certaine fonction $\Phi_m(z)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ [éq. (4)].

Les questions d'ordre de symétrie m autour de Oz présentent une grande importance dans la suite; il en est de même de l'ensemble des fonctions $\Phi_m(z)$ que l'on désignera par « composantes ».

On peut citer certains systèmes d'électrodes désignés sous le nom de systèmes en étoile : ils réalisent des champs d'ordres de symétrie donnés et facilement réglables, utilisés dans la deuxième partie.

1. Écarts géométriques et leur répercussion sur le champ des systèmes.

En supposant connue la distribution du potentiel ψ dans un instrument d'optique « idéal » Σ_0, on étudie celle $\psi + \varphi$ qui règne dans l'instrument « réel » Σ. On cherche à cet effet à déterminer le terme correctif φ en fonction des défauts, principalement des écarts d'ordre géométrique δ caractéristiques de Σ. La relation $\varphi(\delta)$ est très simple [éq. (20)] dans le cas électrique, et tout à fait analogue [éq. (24)] dans le cas magnétique. Elle montre que les symétries m du défaut δ se reportent sur φ. En particulier un défaut d'ordre $m = 2$ (ellipticité des électrodes) donne naissance à un champ dont la suite met en évidence l'importance optique.

La relation (20) entre φ et δ peut se résoudre dans des cas simples à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions potentiel particulières (28); le problème est traité complètement pour une lentille électrostatique à ellipticité et conduit à la solution (36), (37).

2. Aberrations optiques des systèmes centres perturbés.

En appelant φ le potentiel supposé connu de l'instrument réel Σ, on en déduit à la manière classique l'équation générale (41) des trajectoires $s(z)$ au voisinage de Oz, équation unique dans le système de coordonnées (s, z).

On suppose d'abord le champ purement électrique; l'équation (41) s'écrit, sous une forme (42) faisant apparaître des termes infiniment petits, fonctions des diverses composantes du champ Φ_m; seules les toutes premières de ces composantes interviennent.

L'équation (41) peut se résoudre en deux approximations. La première (Gauss) considère seulement les termes analytiques et de degré zéro ou 1 en s; elle conduit à des propriétés de focalisation : Φ_0 fixe la position des plans conjugués, Φ_1 introduit une déviation par rapport à Oz.

La deuxième approximation conduit à l'existence d'aberrations exprimées par la relation générale (49).

En général, les symétries d'ordre $m > 2$ n'interviennent pas et les aberrations se ramènent aux types classiques : distorsion, etc., sphéricité; toutefois, elles ne présentent pas ici la symétrie axiale. Elles se traduisent pratiquement par deux caractéristiques importantes : déformation de l'image Δ [éq. (60)] et limite de résolution ϖ [éq. (61)] en chaque point.

Les aberrations dues à l'ordre $m = 2$, c'est-à-dire à l'ellipticité des électrodes sont les plus importantes; elles comprennent un astigmatisme et une distorsion constants dans le plan objet. On en calcule la limite ϖ [éq. (67)] pour la lentille électrostatique déjà envisagée.

Les observations sont analogues dans le cas où l'instrument Σ comporte un champ magnétique; les défauts optiques conduisent encore ici aux types classiques.

3. Correction d'aberration.

On a vu, dans les trois premières parties, comment les composantes des divers ordres de symétrie du champ créent des aberrations optiques supplémentaires, ces composantes $\Phi_m(z)$ étant dues aux défauts, principalement aux écarts géométriques présentés par Σ. On peut, en revanche, introduire dans l'instrument des champs de composantes $F_m(z)$ telles que les nouvelles aberrations ainsi provoquées annulent les premières, ou du moins les réduisent en grande partie : les systèmes Σ' d'électrodes (ou d'aimants) correspondants seront dits correcteurs.

On étudie d'abord la correction relative à l'astigmatisme d'ellipticité, en raison de l'importance de ce dernier. Des propriétés géométriques simples conduisent à une méthode commode utilisant deux électrodes portées à deux tensions distinctes; une application numérique fournit des ordres de grandeur.

Les propriétés des systèmes Σ' en général sont ensuite examinées en vue de leur application à la réduction des défauts optiques quelconques. On se borne aux systèmes Σ' dont l'emploi est le plus naturel, à savoir ceux disposés à l'extérieur des lentilles et dont l'effet sur les trajectoires n'est que correctif (champ global associé relativement faible). Le calcul montre que leurs effets optiques se réduisent pratiquement aux suivants : une déviation des faisceaux effet de prisme de petit angle), un astigmatisme et une distorsion constants pour l'ensemble du plan objet. Divers montages d'électrodes (ou d'aimants) en particulier ceux en étoile, réalisent de telles actions arbitrairement réglables.

On montre alors comment ces Σ' permettent la correction des aberrations du microscope et comment, d'un point de vue un peu différent ils peuvent être employés dans les appareils comportant un miroir électronique.

Le résultat optimum que l'on puisse atteindre à l'aide de ces systèmes correcteurs est le suivant : seules subsistent les aberrations relatives à l'instrument idéal Σ_0 qui, elles, sont irréductibles.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE.

STRUCTURE DES CHAMPS STATIQUES.

1. Rappel des propriétés générales de répartition des potentiels statiques.

LES COMPOSANTES D'ORDRE m PAR RAPPORT A L'AXE Oz. — Étant donné un champ électrique ou magnétique statique dans le vide, φ *désignera le potentiel correspondant* (scalaire ou vecteur s'il s'agit d'un champ magnétique). Nous allons exprimer φ sous une forme mettant en évidence différents ordres de symétrie m par rapport à un axe Oz. Ces symétries présentent par la suite une grande importance; elles sont d'une part conditionnées par les défauts de l'instrument Σ créateur du champ; elles exercent, d'autre part, des actions caractéristiques dans l'optique de Σ.

L'espace sera rapporté à un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de l'axe Oz; il sera commode de remplacer les deux variables réelles r et θ par une seule variable complexe qui sera l'affixe des points, dans les plans perpendiculaires à Oz jouant le rôle de plans variables complexes

$$s = r e^{i\theta} = x + iy,$$

x et y désignant les coordonnées cartésiennes associées à r et θ.

Faisons apparaître tout d'abord le développement de φ en série de Fourier par rapport à l'angle θ :

$$(1) \qquad \boxed{\varphi(rz\theta) = \sum_0^\infty \varphi_m(rz)\cos m\theta + \varphi'_m(rz)\sin m\theta.}$$

Cette relation met en évidence des *composantes de φ sinusoïdales par rapport à θ et de symétries de répétition, d'ordre $m = 0, 1, 2, \ldots$ autour de Oz; chacune vérifie l'équation de Laplace* ainsi que le montre l'expression de cette dernière en coordonnées cylindriques.

Les divers termes $\varphi_m \cos m\theta$, $\varphi'_m \sin m\theta$ seront désignés brièvement par potentiels composants ou *composantes d'ordre m*; le premier, $\varphi_0(r, z)$ est de révolution.

EXPRESSION DE $\varphi(rz\theta)$ AU VOISINAGE DE L'AXE Oz. FONCTIONS $\Phi_m(z)$. — Nous développons φ dans la région de l'axe Oz en raison du rôle joué par cette région dans les propriétés optiques. La fonction de notre problème ne comporte pas de singularités et peut s'exprimer par une série en x et y, c'est-à-dire, en s et ($\bar{s}$ (s conjugué)), soit

$$(2) \qquad \varphi(rz\theta) = \sum_{h,l=0}^{\infty} \alpha_{hl}(z)\, s^h \bar{s}^l.$$

Nous obtenons la forme générale de cette série en exprimant qu'elle obéit à l'équation de Laplace, c'est-à-dire, dans le système des variables s, $\bar{s}$, z, à

$$\left(4\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial \bar{s}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0.$$

Il en résulte une formule de récurrence simple entre les coefficients

$$4\,hl\,\alpha_{hl} = -\alpha''_{h-1\,l-1},$$

en convenant de *représenter les ordres de dérivation par des indices supérieurs.*

Supposons d'abord $h \geq l$; on voit que les α_{hl} se déduisent des coefficients α_{h-l} par

$$\alpha_{hl} = (-1)^l \frac{(h-l)!}{2^{2l}\, h!\, l!}\, \alpha^{2l}_{h-l\,0},$$

ou, si l'on pose

$$\alpha^{2l}_{h-l\,0} = \frac{\Phi^{2l}_{h-l}}{2^{h-l}(h-l)!},$$

$$\alpha_{hl} = \frac{(-1)^l}{2^{h+l}\, h!\, l!}\, \Phi^{2l}_{h-l}(z).$$

Pour $h < l$, les α_{hl} se ramènent aux α_{lh} en vertu de la réalité de l'expression (2)

$$\alpha_{hl} = \alpha_{lh}.$$

On pourra les écrire sous la même forme, à condition de poser

$$(3) \qquad \Phi^{2l}_{h-l} = (-1)^{l+h}\, \bar{\Phi}^{2h}_{l-h}$$

et le développement général des potentiels φ est ainsi

$$(4) \qquad \boxed{\varphi(rz\theta) = \sum_{h,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{h+l}\, h!\, l!}\, \Phi^{2l}_{h-l}(z)\, s^h \bar{s}^l.}$$

Il fait intervenir une suite de *fonctions $\Phi_m(z)$ ($m \geq 0$) arbitraires et indépendantes et leurs dérivées successives* $\Phi^n_m(z) = \frac{d^n \Phi_m}{dz^n}$; les fonctions d'indice inférieur négatif s'y ramenant à l'aide de (3).

La connaissance du champ est équivalente à celle des quantités $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ..., $\Phi_m(z)$, ...

On aura par exemple, en se limitant au 4e ordre, en r,

$$(5)\quad \varphi(rz\theta) = \Phi_0 + \frac{1}{2}(\Phi_1 s + \overline{\Phi}_1 \bar{s})$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\Phi_2 s^2 - \Phi_0^2 s\bar{s} + \frac{1}{2}\overline{\Phi}_2 \bar{s}^2\right)$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\Phi_3 s^3 - \frac{1}{2}\Phi_1^2 s^2\bar{s} - \frac{1}{2}\overline{\Phi}_1^2 s\bar{s}^2 + \frac{1}{6}\overline{\Phi}^3\bar{s}^3\right)$$
$$+ \frac{1}{16}\left(\frac{1}{24}\Phi_4 s^4 - \frac{1}{6}\Phi_2^2 s^2\bar{s} + \frac{1}{4}\Phi_0^4 s^2\bar{s}^2 - \frac{1}{6}\overline{\Phi}_2^2 s\bar{s}^3 + \frac{1}{24}\Phi_4\bar{s}^4\right) + \ldots$$

Les fonctions $\Phi_m(z)$ pour $m \geq 1$ sont complexes; on a, pour chacune, une représentation graphique toute naturelle si l'on considère la famille de vecteurs définis dans chacun des plans perpendiculaires à Oz, par les affixes $\Phi_m(z)$.

On notera que cette famille de vecteurs ne présente aucun caractère intrinsèque; elle dépend du plan choisi pour origine de l'angle θ; ce qui revient au même, si l'on fait tourner le champ autour de Oz, elle n'est pas entraînée par la même rotation. Il est facile de voir, en effet, que si le champ tourne de l'angle α autour de l'axe, $\Phi_m(z)$ est multiplié par $e^{-im\alpha}$, autrement dit, la représentation vectorielle correspondante tourne de $(-m\alpha)$.

Si l'on regarde maintenant comment se répartit le développement (4) entre les diverses composantes d'ordre m, on observe aisément que *chaque fonction $\Phi_m(z)$ (ainsi que ses dérivées et conjuguées) détermine les composantes de même ordre m : $\varphi_m \cos m\theta$ et $\varphi'_m \sin m\theta$.*

Les degrés en r des termes de chacune de ces composantes étant $h + l$, où h et l sont ≥ 0 et $|h - l| = m$, on voit qu'ils constituent la suite des nombres de même parité : m, $m + 2$, $m + 4$, ...; *toute composante d'ordre m est d'ordre infinitésimal r^m au voisinage de Oz*; les premiers termes de φ_m et Φ'_m étant

$$(6)\quad \varphi_m(rz) = \frac{1}{2^m m!}(\Phi_m + \overline{\Phi}_m) r^m + \ldots$$
$$\varphi'_m(rz) = \frac{i}{2^m m!}(\Phi_m - \overline{\Phi}_m) r^m + \ldots$$

Pour des raisons de simplicité, la dénomination de composantes d'ordre m sera étendue aux fonctions $\Phi_m(z)$ elles-mêmes.

Expression de $\varphi(rz\theta)$ a l'infini. — Prenons le système de coordonnées polaires $(\rho\tau\theta)$ de centre O, d'axe polaire Oz, τ étant l'angle de la direction, défini à partir de l'axe polaire; la résolution de l'équation de Laplace avec ces variables fournit comme expression générale de φ un développement qui, identifié à (1) donne la structure suivante pour les φ_m et les φ'_m dans le cas où ils s'annulent à l'infini (c'est le cas rencontré par la suite)

$$\varphi_m(rz) = \sum_{n \geq m} \frac{a_{nm}}{\rho^{n+1}} P_n^m(\cos\tau),$$
$$\varphi'_m(rz) = \text{expression analogue.}$$

la notation $P_n^m(x)$ étant celle des fonctions sphériques. Plaçons-nous suffisamment loin de l'origine O; les séries précédentes convergent effectivement et sont équivalentes au premier terme, de sorte que l'on peut écrire

$$(7)\quad \varphi_m(rz) = \frac{b_m}{\rho^{m+1}} \sin^m\tau + \ldots$$

(L'expression générale de $P_n^m(\cos\tau)$ montre en effet immédiatement que cette fonction est égale à $\sin^m\tau$ à un facteur numérique près).

La relation obtenue indique que les *potentiels composants d'ordre m, varient au loin comme $\frac{1}{\rho^{m+1}}$* (ou sont d'ordre infinitésimal supérieur si $b_m = 0$) : leur décroissance à l'infini est d'autant plus rapide que m est plus grand.

Une remarque analogue pouvait être faite concernant le voisinage de l'axe Oz, puisque φ_m et φ'_m sont de l'ordre de r^m en vertu de (6) : il est possible en conséquence de dire, de façon qualitative que *la répartition de champs de symétrie d'ordre m autour de Oz s'étend à partir des électrodes créatrices d'autant moins loin que m est plus grand.*

2. Potentiel créé par un système d'électrodes en étoile autour de Oz (1).

Soit tout d'abord le cas électrostatique; la loi de potentiel $\varphi(rz\theta)$, c'est-à-dire l'ensemble des composantes $\Phi_m(z)$ dépendent de la disposition géométrique des électrodes ainsi que des tensions appliquées. S'il arrive que ces données présentent une symétrie de répétition d'ordre M par rapport à Oz, il en est de même de φ : seules sont différentes de zéro les composantes $\Phi_m(z)$ où $m = M, 2M, \ldots$; on trouve ainsi les systèmes de révolution pour $M = 0$.

Nous nous placerons ici dans un cas un peu plus général, celui où *la symétrie de répétition n'existe qu'en ce qui concerne les paramètres géométriques.*

(1) Le paragraphe peut être laissé de côté, il ne constitue qu'un exemple d'importance secondaire pour la suite.

On verra que le champ résultant possède encore des propriétés simples : ses diverses composantes sont réglables de façon commode en fonction des tensions appliquées et nous en trouverons des applications par la suite.

Considérons ainsi un système de M électrodes de formes quelconques mais géométriquement identiques et disposées en étoile, c'est-à-dire suivant une symétrie de répétition d'ordre M autour de Oz.

On désigne ces électrodes par

$$A_K (K = o, 1 \ldots M);$$

chacune se déduit de la précédente, A_{K-1} à l'aide d'une rotation d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{M}$ autour de Oz. La figure (1) représente un exemple dans lequel $M = 6$.

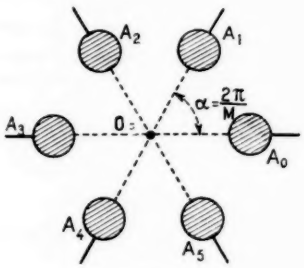


Fig. 1.

Cas ou le potentiel de chaque électrode est une fonction sinusoïdale de sa position angulaire. — Supposons pour commencer, *chaque électrode A_K portée à la tension respective* :

$$V_K = v \cos(Kp\alpha - \omega), \tag{8}$$

p étant un entier vérifiant sans que cela introduise de restriction : $o \leq p < \frac{M}{2}$;

v et ω sont deux constantes.

On déterminera la structure du champ résultant φ en faisant appel à des éléments complexes.

a. On imaginera d'abord que les A_K sont portées à des tensions respectives $e^{iKp\alpha}$; soit $\psi(rz\theta)$ la distribution de potentiel correspondante.

Multiplions par la constante $e^{ip\alpha}$; on obtient une nouvelle loi de potentiel $\psi e^{ip\alpha}$ dans laquelle A_K est portée à la tension $e^{i(K+1)p\alpha}$, c'est-à-dire à la tension présentée par A_{K+1} dans la répartition ψ; il en résulte que la fonction $\psi e^{ip\alpha}$ est identique à la fonction ψ tournée de l'angle $-\alpha$:

$$\psi(rz\theta)\, e^{ip\alpha} = \psi(rz\ \theta + \alpha)$$

ce qui impose à la fonction ψ un développement de Fourier par rapport à θ de la forme

$$\psi(rz\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(rz)\, e^{i(p+nM)\theta}. \tag{9}$$

b. Évaluons alors le potentiel créé par les électrodes A_K supposées portées aux tensions respectives $ve^{i(Kp\alpha-\omega)}$; on le forme à partir du précédent par multiplication par $ve^{-i\omega}$ c'est donc :

$$v\, e^{-i\omega} \psi(rz\theta).$$

Si enfin, nous prenons les parties réelles des quantités précédentes, nous obtenons une réponse au problème envisagé : les potentiels $v \cos(Kp\alpha - \omega)$ appliqués aux A_k créent la distribution

$$\varphi = \mathcal{R}[v\, e^{-i\omega} \psi(rz\theta)]$$

c'est-à-dire d'après (9)

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[v\, e^{-i\omega} f_n\, e^{i(p+nM)\theta} + v\, e^{i\omega} \bar{f}_n\, e^{-i(p+nM)\theta} \right]. \tag{10}$$

Le potentiel φ est formé uniquement de composantes d'ordres de symétrie $m = |p + nM|$, c'est-à-dire

$$m = p, \quad (M - p), \quad (M + p), \quad (2M + p), \quad \ldots, \tag{11}$$

Cette liste est ordonnée suivant les valeurs croissantes : *l'ordre de symétrie minimum figurant dans φ est $m = p$*. Déterminons d'autre part la façon dont les composantes $\Phi_m(z)$ de φ dépendent des paramètres v et ω. Trois cas sont à considérer à cet effet.

Premier cas : $p \neq o, \frac{M}{2}$. — Les exposants figurant dans le développement (10) sont alors tous différents de sorte qu'il est impossible de faire fusionner certains termes de cette série; par identification avec la relation générale (7), on en déduit la forme des fonctions $\Phi_m(z)$:

$$\Phi_m(z) = \begin{cases} v\, e^{-i\omega} u_m(z) & \text{si } m = p,\ M + p,\ 2M + p, \ldots \\ v\, e^{i\omega} u_m(z) & \text{si } m = M - p,\ 2M - p, \ldots \end{cases} \tag{12}$$

$u_m(z)$ ne dépendant ni de v, ni de ω, c'est-à-dire fonction seulement des paramètres géométriques du système d'électrodes.

Deuxième cas : $p = o$. — Les électrodes sont toutes à la tension $v \cos \omega$ d'où résulte immédiatement que $\Phi_m(z)$ est proportionnel à $v \cos \omega$:

$$\Phi_m(z) = v \cos\omega\, u_m(z), \qquad (m = o,\ M,\ 2M, \ldots). \tag{13}$$

Troisième cas : $p = \frac{M}{2}$ (ce n'est possible que pour un nombre M pair d'électrodes). — On remarque que les tensions des A_K s'écrivent alors $(-1)^K v \cos\omega$ et l'on trouve ainsi la même proportionnalité à $v \cos\omega$:

$$(14) \quad \Phi_m(z) = v\cos\omega\, u_m(z), \qquad \left(m = \frac{M}{2}, \frac{3M}{2}, \frac{5M}{2}, \ldots\right).$$

Cas général. — *Les tensions appliquées aux électrodes sont quelconques.* — Soit V_K ces tensions : V_K est une fonction de la variable K prenant une suite discontinue de valeurs; une telle fonction peut toujours s'écrire sous forme d'expression sinusoïdale

$$V_K = \sum_{|p| \leq \frac{M}{2}} v_p \cos(pK\alpha - \omega_p)$$

En vertu des propriétés linéaires du potentiel, nous sommes ainsi ramenés au cas particulier : le potentiel $\varphi(r\,z\,\theta)$ est égal à la somme de ceux que créerait isolément chaque loi sinusoïdale appliquée aux électrodes.

Application d'un système d'électrodes en étoile a la réalisation de champs possédant certaines structures. — Étant donné un système en étoile, ce qui précède nous montre de quelle manière on pourra agir sur les composantes des divers ordres du champ en réglant les tensions appliquées aux électrodes. Plus précisément, on pourra *agir sur « l'amplitude » (complexe) des composantes* $\Phi_m(z)$, non sur leur loi de variation en z elle-même (formules 12, 13, 14).

Les exemples suivants mettent en évidence cette propriété. *Appliquons aux électrodes, les tensions respectives*

$$(15) \quad V_K = v_0 + v_1 \cos(K\alpha - \omega_1) + v_2(2K\alpha - \omega_2).$$

Divers cas sont à envisager en ce qui concerne le nombre M d'électrodes

a. Cas $M = 5$. — On peut indiquer dans un tableau les ordres de symétrie présents dans le champ en vertu de chacun des trois termes du deuxième membre de (15) (formule 11)

Termes présents dans V_K.	Ordres de symétrie m, présents dans les champs associés.
$(p=0)$ v_0.....	0 . . . . . 5 . . . . 10 . .
$(p=1)$ $v_1\cos(K\alpha-\omega_1)$.	. 1 . . 4 . 6 . . 9 . 11
$(p=2)$ $v_2\cos(2K\alpha-\omega_2)$.	. . 2 3 . . . 7 8 . . . 12 ...

On voit que le champ résultant présentera dans le cas général des composantes de tous les ordres de symétrie.

Les cinq paramètres v_0, v_1, ω_1, v_2, ω_2, auront les rôles suivants :

A l'aide de v_0, *on peut régler arbitrairement l'amplitude réelle de* $\Phi_0(z)$, et cette variation est accompagnée de celles de $\Phi_5(z)$, ...; la condition $v_0 = 0$ entraîne la nullité de ces fonctions, en particulier celle de $\Phi_0(z)$.

A l'aide de v_1, ω_1, *on peut régler arbitrairement l'amplitude complexe de* $\Phi_1(z)$, variation accompagnée de celles de $\Phi_4(z)$... : d'après (12) ces fonctions varient proportionnellement à $v_1 e^{-i\omega_1}$, $v_1 e^{i\omega_1}$ respectivement; la condition $v_1 = 0$ entraîne leur nullité en particulier celle de $\Phi_1(z)$.

Observations analogues en ce qui concerne v_2, ω_2, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$.

b. Cas $M > 5$. — Le tableau des ordres de symétrie présents dans le champ est par exemple pour $M = 7$:

Termes présents dans V_K.	Ordres de symétrie m, présents dans les champs associés.
$(p=0)$ v_0.....	0 . . . . . 7 . . . . .
$(p=1)$ $v_1\cos(K\alpha-\omega_1)$.	. 1 . . . . 6 . 8 . . . .
$(p=2)$ $v_2\cos(K\alpha-\omega_2)$.	. . 2 . . 5 . . . 9 . . 12 ...

Il contient toujours les valeurs 0, 1, 2, mais il offre ensuite des lacunes, d'autant plus étendues que M est plus grand. Les cinq paramètres permettront d'effectuer comme dans le cas $M = 5$, *les réglages en amplitude des fonctions* $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$.

c. Cas $M = 4$. — Tous les ordres de symétrie sont présents dans le champ.

Les paramètres v_0, v_1, ω_1 *règlent encore en amplitude les fonctions* $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$.

Quant au troisième terme de (15), il forme un cas où $p = \frac{M}{2}$: les paramètres correspondants v_2 et ω_2 fusionnent en un seul réel $v_2 \cos\omega_2$ (formule 14) en ce qui concerne leur influence sur $\Phi_2(z)$; autrement dit v_2, ω_2 *ne permettent plus ici qu'un réglage de* $\Phi_2(z)$ *en module*; ils ne peuvent agir sur la phase de cette fonction. Cette fusion des deux paramètres v_2 et ω_2 s'accorde avec le fait que le système ne comportant que quatre électrodes, les cinq paramètres v_0, v_1, ω_1, v_2, ω_2 doivent en fait se réduire à 4.

d. Cas $M < 4$. — Le troisième terme de (15) correspond à $p = 2 > \frac{M}{2}$. Conformément à une observation du début il est équivalent à un terme $p < \frac{M}{2}$.

Effectivement, si l'on prend $M = 3$, par exemple, l'expression

$$v_2 \cos\left(2K\frac{2\pi}{3} - \omega_2\right)$$

peut s'écrire

$$v_2 \cos\left(K\frac{2\pi}{3} + \omega_2\right)$$

c'est-à-dire fusionne avec celle en v_1.

Autrement dit, l'on est ramené à une expression (15) à deux termes seulement. Le tableau des ordres de symétrie est alors, toujours pour $M = 3$.

	Termes présents dans V_K.	Ordres de symétrie m, présents dans les champs associés.
$(p = 0)$	v_0	0 . . 3 . . 6 .
$(p = 1)$	$v_1 \cos(K\alpha - \omega_1)$.	. 1 2 . 4 5 . 7 ...

On voit que l'on peut régler à l'aide de $v_1\,\omega_1$, les amplitudes de $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, mais de façon indissociable l'une de l'autre.

D'une manière générale, ce qui précède nous conduit à la conclusion suivante :

Étant donné un système de M électrodes en étoile, si $M \geq 2n + 1$ *et seulement dans ce cas, ce système est susceptible de fournir un champ dont les amplitudes complexes des* $(n + 1)$ *premières composantes* $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ..., $\Phi_n(z)$ *sont réglables arbitrairement et indépendamment* : il suffit d'appliquer les tensions respectives :

$$V_K = \sum_{p=0}^{n} v_p \cos(pK\alpha - \omega_p). \tag{16}$$

$\Phi_p(z)$ varie comme $v_p e^{-i\omega_p}$.

Remarque. — Les propriétés que nous avons obtenues concernant le champ des systèmes en étoile, ne supposent pas que ces systèmes soient immergés dans une région vide de champ : elles nécessitent seulement qu'ils soient placés dans un champ préexistant, nul ou non, mais créé par des électrodes de révolution, c'est-à-dire, *dans un système centré, l'axe de l'étoile coïncidant avec l'axe de révolution.*

Cas particulier des systèmes a électrodes ponctuelles. — L'étude de ce type qui est le plus simple précisera l'allure des champs et des diverses fonctions $\Phi_m(z)$. Nous prenons M électrodes $A_0, \ldots, A_{K-1}$, sphériques, de rayon ρ, et situées à distance a de l'axe Oz.

Leurs azimuts seront

$$\theta_K = \frac{2K\pi}{M} \tag{17}$$

ρ est supposé assez petit vis-à-vis des autres dimensions linéaires pour que les phénomènes d'influence électrique entre les diverses électrodes soient négligeables. Dans ces conditions, chaque sphère portée à la tension V_k prend une charge $Q_k = \rho V_k$ (unités E S C G S) qui apparaît comme étant localisée en son centre.

Calculons les premiers termes du développement du champ à l'extérieur lorsque les V_k sont donnés par (8)

$$V_K = v\cos(Kp\alpha - \omega),$$

où

$$\alpha = \frac{2\pi}{M}$$

c'est-à-dire

$$Q_K = q\cos(Kp\alpha - \omega) \quad \text{avec} \quad q = \rho v.$$

Nous commençons par déterminer le potentiel créé par une seule électrode, soit A_1 (*fig.* 2) :

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{|AM|} = Q_1\left[z^2 + a^2 - a(s e^{-i\theta_1} + \bar{s} e^{i\theta_1}) + s\bar{s}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement de cette quantité par rapport aux puissances de s et $\bar{s}$, identifié avec la structure

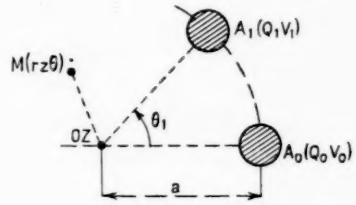


Fig. 2.

générale (4), fournit les valeurs suivantes pour les premières composantes que nous noterons $\Psi_m(z)$

$$\Psi_0(z) = Q_1 \quad (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Psi_1(z) = aQ_1 \quad (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-i\theta_1},$$

$$\Psi_2(z) = 3a^2 Q_1 (z^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} e^{-2i\theta_1}.$$

Les potentiels créés par les autres sphères A_k auraient des expressions analogues de sorte que les composantes $\Phi_m(z)$ du potentiel φ créé par le système total sont, en remplaçant φ_k et V_K par leurs valeurs (17) et (8) :

$$\Phi_0(z) = q \quad (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=0}^{M-1} \cos\left(K\frac{2p\pi}{M} - \omega\right),$$

$$\Phi_1(z) = aq \quad (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \sum e^{-i\frac{2K\pi}{M}} \cos\left(K\frac{2p\pi}{M} - \omega\right),$$

$$\Phi_2(z) = 3a^2 q (z^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \sum e^{-i\frac{4K\pi}{M}} \cos\left(K\frac{2p\pi}{M} - \omega\right).$$

L'évaluation de $\Phi_0(z)$ s'obtient immédiatement

$$\Phi_0(z) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad p \neq 0. \\ = M(z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} q\cos\omega & \text{si} \quad p = 0. \end{cases}$$

Celle des deux autres fonctions demande la transformation d'expressions du type

$$\sum_{K=0}^{M-1} x^K \cos(Kp\alpha - \omega)$$

dont nous rappellerons le calcul :

on suppose d'abord x réel : la quantité précédente apparaît comme étant la partie réelle d'une expression complexe

$$\mathcal{R}\left[e^{-i\omega} \sum_{K=0}^{M-1} (x e^{ip\alpha})^K \right]$$

qui est aisément calculable; on trouve ainsi

$$\sum_{K=0}^{M-1} x^K \cos(Kp\alpha - \omega)$$
$$= \frac{\left\{ x^M \left\{ x \cos[(M-1)p\alpha - \omega] - \cos(Mp\alpha - \omega) \right\} - x\cos(p\alpha + \omega) + \cos\omega \right\}}{(x - e^{ip\alpha})(x - e^{-ip\alpha})}.$$

Les deux membres étant fonctions analytiques de x, la relation est encore valable pour x complexe. Il ne reste plus qu'à y remplacer x et α par leurs valeurs :

$$\alpha = \frac{2\pi}{M}, \qquad x = \begin{cases} e^{-\frac{2\pi i}{M}} & \text{dans} \quad \Phi_1(z). \\ e^{-\frac{4\pi i}{M}} & \text{dans} \quad \Phi_2(z). \end{cases}$$

Le tableau suivant résume les résultats pour $p = 0, 1, 2$ et pour $M \geqq 5$ (nombre permettant le réglage des amplitudes de Φ_0, Φ_1, Φ_2)

(18)

p.	Q_K.	$\Phi_0(z)$.	$\Phi_1(z)$.	$\Phi_2(z)$.
0.....	$q\cos\omega$	$M(z^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} q\cos\omega$	0	0
1.....	$q\cos\left(\frac{2K\pi}{M} - \omega\right)$	0	$\frac{Ma}{2}(z^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} q\, e^{-i\omega}$	0
2.....	$q\cos\left(\frac{4K\pi}{M} - \omega\right)$	0	0	$\frac{3Ma^2}{2}(z^2+a^2)^{-\frac{5}{2}} q\, e^{-i\omega}$

On remplacera les considérations de charges par celles de potentiels des électrodes en remplaçant q par ρv dans les trois dernières colonnes. Sans revenir sur la dépendance des fonctions vis-à-vis des paramètres v et ω, conformes à l'étude des systèmes en étoile généraux, observons que le nombre M d'électrodes ($M \geqq 5$) a un simple rôle de proportionnalité : *les composantes du champ d'ordre* 0, 1, 2, *varient proportionnellement à* M.

L'étude préalable montre de plus que la suite des ordres des composantes présente après $m = p$, une lacune d'autant plus étendue que M est plus grand. A la limite pour M infiniment grand, seul existe dans le champ l'ordre de symétrie $m = p$; le système se présente alors sous la forme d'un cercle linéairement électrisé dont l'étude se retrouvera plus loin.

Si l'on veut réaliser des systèmes réels auxquels le calcul précédent s'applique avec une bonne approximation, on prendra d'abord des électrodes sphériques, présentant des rayons de longueur plus faible que les distances mutuelles : les phénomènes d'influence seront secondaires. Ces électrodes seront d'autre part fixées à l'extrémité de tiges suffisamment fines (*fig.* 1); les charges portées par ces tiges en vertu des tensions appliquées resteront assez petites et leur répercussion sur le potentiel au voisinage de l'axe sera négligeable. De plus, le système sera placé dans une région de champ pratiquement nul, à l'intérieur par exemple d'un blindage électrostatique, de rayon sensiblement supérieur à a, de façon à éviter ici encore l'apparition de phénomènes d'influence.

Systèmes magnétiques en étoile. — On obtient des résultats analogues aux précédents si l'on envisage la distribution du champ magnétique créé par les systèmes magnétiques en étoile. Ces derniers seront formés de M *aimants géométriquement identiques et disposés suivant une symétrie de répétition d'ordre* M *autour de* Oz.

Par le terme aimant, il faudra entendre ici tout assemblage de circuits et de noyaux magnétiques.

Une telle étoile pourra être placée dans le champ magnétique d'un système centré à conditions que les axes coïncident. La figure 3 fournit le schéma d'une réalisation possible avec $M = 6$.

E est l'enceinte du système centré; T un tube assurant le blindage magnétique vis-à-vis des perturbations extérieures.

Si nous supposons que les éléments magnétiques intervenant dans le montage ont des *perméabilités*

constantes, du moins dans les limites d'utilisation, il est possible d'obtenir des résultats équivalents à ceux des étoiles électriques. En effet, le problème est alors linéaire; si les diverses bobines B_k sont alimentées par les courants respectifs

$$I_K = I\cos(Kp\alpha - \omega)$$

(I et ω constantes), les mêmes raisonnements sont applicables et conduisent aux mêmes conclusions

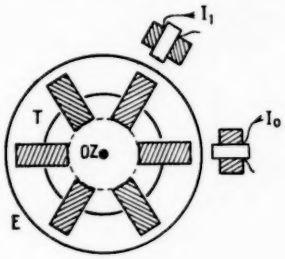


Fig. 3.

(formules 11, 12, 13, 14) à condition de *considérer les courants I_k au lieu des potentiels V_K et $\varphi(rz\theta)$ désignant maintenant le potentiel scalaire magnétique.*

De là découlent les mêmes possibilités de réalisation et de réglage de champs magnétiques possédant certaines structures.

L'équivalent magnétique du système à électrodes ponctuelles est ici celui à pôles magnétiques ponctuels réalisable dans la mesure où les masses magnétiques d'un barreau sont localisées dans une région de faibles dimensions (métal de grande perméabilité). Le tableau (18) fournit les premiers coefficients du développement du potentiel correspondant, Q_k désignant ici les masses magnétiques des pôles, reliables avec une plus ou moins bonne approximation aux courants magnétisants I_K.

CHAPITRE PREMIER.

Les écarts géométriques et leurs répercussions sur le champ des systèmes.

3. Nous nous limitons par la suite aux systèmes centrés; étant donné un tel *système effectivement réalisé, soit* Σ, il présente divers écarts vis-à-vis de l'*instrument idéal* Σ_0 que l'on désirait construire. Nous étudierons particulièrement le cas des écarts « géométriques » c'est-à-dire résidant dans le fait que les surfaces S des électrodes réelles ne sont pas rigoureusement confondues avec celles S_0 des électrodes de Σ_0 (positions imparfaites, défauts de centrage, formes défectueuses). D'autres perturbations proviennent d'irrégularités de la masse même des pièces (manque d'homogénéité chez les matériaux magnétiques), d'autres des fluctuations des potentiels d'électrodes ou d'intensités des courants magnétisants, d'autres enfin des champs parasites.

D'une façon générale nous appellerons $\psi(rz\theta)$, *la répartition du potentiel du champ qui s'exercerait dans le système idéal* Σ_0; le terme « écart » représentera toute influence supposée faible modifiant le champ, qu'elle soit indépendante de la volonté de l'opérateur, ou au contraire provoquée à dessein. On notera $\Psi + \varphi$, *la loi de potentiel du système ainsi perturbé* Σ. φ est l'élément perturbateur traduisant l'existence de l'écart.

Certaines perturbations peuvent être variables dans le temps (dilatations thermiques, vibrations, résidus de champs alternatifs). On supposera toutefois les *équations des champs statiques applicables à chaque instant*, d'où la nécessité que les variations ne soient pas trop rapides, plus précisément que les longueurs d'ondes électromagnétiques résultantes soient sensiblement supérieures aux dimensions de l'instrument.

Le potentiel correctif obéira ainsi à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Sa présence dans le système Σ agit sur la structure des faisceaux électroniques en créant des aberrations nouvelles ou en modifiant celles propres à Σ_0; ce sont ces modifications que l'on se propose d'étudier.

Écarts géométriques δ. Leurs composantes de diverses symétries par rapport a Oz. — On estimera l'écart géométrique présenté par S par la connaissance en tout point de la distance de S_0 à S, soit $\delta(z\theta)$ (*fig.* 4 *a*); on pourra désigner

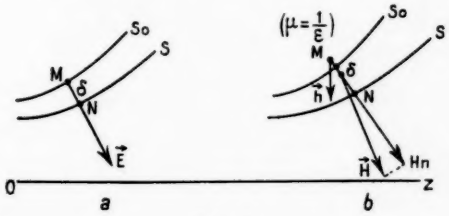


Fig. 4.

brièvement l'écart par δ, sans oublier toutefois que cette notation représente une fonction et non un nombre unique. Cette fonction doit être considérée comme ayant un sens algébrique; on la comptera positivement dans le sens de la demie normale extérieure à S_0.

Nous mettrons d'abord en évidence pour δ, ainsi qu'on l'a fait pour φ, son développement en série de Fourier, en fonction de l'angle θ :

$$(19) \qquad \delta(z\theta) = \sum_{0}^{\infty} \delta_m(z) \cos m\theta + \delta'_m(z) \sin m\theta.$$

On fait apparaître ainsi diverses composantes sinusoïdales et de symétries de répétition d'ordres $m = 0, 1, 2, \ldots$, autour de O z.

Les écarts étant toujours supposés petits, si S se déduit de S_0 par une somme de diverses transformations géométriques (déplacements, déformations), le $\delta(z\theta)$ représentatif est égal à la somme des δ associés à chaque transformation envisagée isolément. On peut d'ailleurs se donner, au lieu de la distance véritable δ, la distance $d(z\theta)$ comptée suivant l'une des coordonnées : radiale suivant r, axiale suivant z : l'on a pour $d(z\theta)$, un développement correspondant terme à terme à celui (19) de $\delta(z\theta)$. Montrons que dans ces conditions, les éléments sinusoïdaux obtenus présentent une signification physique importante.

a. Termes $m = 0$ et 1. — Le premier $m = 0$, étant indépendant de θ, *conserve la symétrie de révolution autour de* O z et inversement : on l'observe par exemple si S se déduit de S_0 par une translation suivant O z ou une homothétie centrée sur cet axe.

En ce qui concerne les composantes $m = 1$, elles s'expriment par $d = d'' \cos(\theta - \theta_1)$; en vertu de leur existence, les sections des S par des plans perpendiculaires à O z sont circulaires et identiques à celles de S_0, mais décalées d'une quantité $d''(z)$ suivant la direction $\theta_1(z)$.

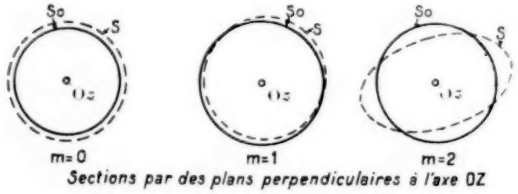


Fig. 5.

Supposons que l'écart consiste en de simples décentrages des électrodes; les S se déduisent des S_0 par des déplacements; il n'existe que des termes $m = 0$ et 1. L'on voit en effet que la distance axiale d entre S_0 et S est alors fonction linéaire des coordonnées cartésiennes et par suite de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En définitive, *chaque fois que les électrodes S se déduisent de S_0 par des déformations conservant leur symétrie de révolution et par des décentrages, $\delta(z\theta)$ ne renferme que des composantes $m = 0$ et 1.*

b. Termes $m \geq 2$. — Les composantes $m = 2$ s'écrivent par exemple :

$$d = d'' \cos 2(\theta - \theta_2).$$

Un calcul simple montre qu'elles donnent aux sections de S par des plans normaux à O z, la forme d'ellipses centrées sur O z et de même aire que les cercles sections de S_0.

L'ensemble des défauts $m = 2$ sera dit ellipticité. — Quant aux termes $m > 2$, on voit sans qu'il soit utile d'insister, qu'ils conduisent à des sections de S présentant des ondulations de plus en plus serrées par rapport à la forme circulaire : les défauts représentés sont de plus en plus étroits à mesure que m augmente.

En vertu des observations précédentes, les composantes $m \geq 2$ *ne peuvent exister que si les S se déduisent des S_0 par des déformations détruisant leur symétrie de révolution propre.* L'usinage des électrodes à l'aide de tours « parfaits » ne les introduirait pas. Le finissage des surfaces à l'aide du *polissage électrolytique* tend au contraire à provoquer leur existence. On sait, en effet, que ce procédé, à moins d'être appliqué durant un temps très court, crée de légères ondulations superficielles et dont la largeur, c'est-à-dire l'ordre m présente des valeurs diverses.

Certaines de ces ondulations sont très serrées :

La figure 6 montre l'aspect au microscope d'un de leurs types caractéristiques obtenu facilement dans le polissage d'électrodes en acier inoxydable [1]; l'œil ne discerne sur la surface que des irisations dues à une périodicité de structure très grossière. Ces ondulations correspondent à de grandes valeurs de m; ainsi qu'on le verra leur effet optique est, par suite, nul.

Il n'en est pas de même d'irrégularités beaucoup plus larges apparaissant progressivement en liaison avec les symétries du montage électrolytique; si l'on prend une électrode d'ouverture circulaire plongeant verticalement dans le bain, le polissage confère à cette ouverture une ellipticité parfaitement observable à l'œil au bout de quelques dizaines de minutes. Nous verrons qu'un tel défaut est néfaste à l'optique du système centré bien avant ce stade : il doit être pris en considération, à côté des avantages que procurerait le polissage électrolytique en ce qui concerne la stabilité des électrodes sous haute tension.

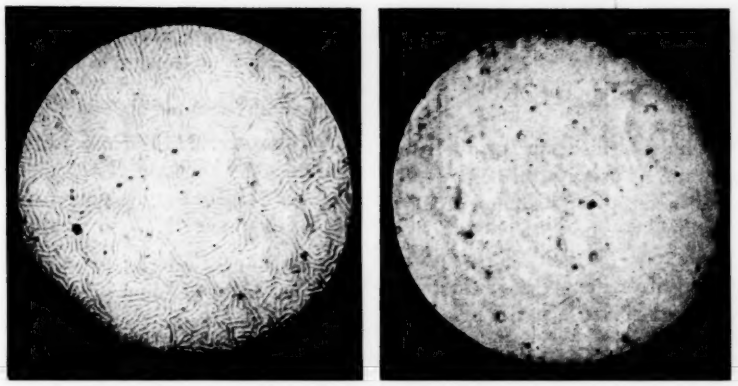


Fig. 6.

4. Relation entre l'écart géométrique δ et le potentiel correcteur associé φ. Propriétés de φ.

Relation (φ, δ) *dans le cas électrique.* — L'étude de l'influence « optique » de δ exige d'abord la détermination du potentiel correctif créé par δ. Plaçons-nous dans le cas où le champ du système est purement électrique; soit E (z) le champ s'exerçant à la surface de S_0 des électrodes idéales dans Σ_0, compté algébriquement suivant la convention indiquée pour δ (*fig.* 4 *a*).

On obtient la relation cherchée en exprimant que le potentiel en tout point N de S dans Σ est égal au potentiel qui existerait dans le système Σ_0 au point M de S_0 qui lui fait vis-à-vis

$$\psi(N) + \varphi(N) = \psi(M)$$

c'est-à-dire si l'on se limite au premier ordre infinitésimal

$$\boxed{\varphi = E\delta} \tag{20}$$

le long des surfaces S_0 des électrodes.

Cette condition aux limites (remplacée bien entendu par celle de nullité à l'infini dans les régions sans électrodes) permet théoriquement du moins, la *détermination sans ambiguïté du potentiel perturbateur φ en fonction de l'écart δ.*

Une discussion simple montre que l'approximation réalisée en vue d'obtenir (20) est valable si *l'écart entre S_0 et S est petit vis-à-vis des distances à l'axe* Oz, *petit également vis-vis des rayons de courbure des deux surfaces dans la région envisagée.*

Remplaçons dans la relation (20) φ et δ par leurs développements (1) et (19); multiplions les deux membres par $\cos m\theta$, et intégrons par rapport à θ de 0 à 2π; il reste seulement en vertu de l'orthogonalité des fonctions, pour chaque valeur de m

$$\varphi_m = E\delta_m \tag{21}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_m \cos m\theta = E\,\delta_m \cos m\theta, \qquad \text{le long de } S_0.$$

On aurait de même :

$$\varphi'_m \sin m\theta = E\,\delta'_m \sin m\theta, \qquad \text{le long de } S_0.$$

Autrement dit, la relation (20) s'applique successivement et indépendamment aux termes des divers rangs des développements : $\varphi_m \cos m\theta$ (resp. $\varphi'_m \sin m\theta$) *est créé par l'écart* $\delta_m \cos m\theta$ (resp. $\delta'_m \sin m\theta$) : *les symétries de δ se reportent sur le potentiel correcteur associé.*

Il en résulte, en raison des relations (6) que le potentiel perturbateur dû aux écarts d'ordre m est de l'ordre infinitésimal r^m au voisinage de Oz; le champ radial correspondant est donc de l'ordre de r pour $m = 0$, de $r^0, r, \ldots, r^{m-1}$, pour $m = 1, 2, \ldots, m$.

La répercussion sur l'optique du système fait essentiellement intervenir ce champ. On voit ainsi que *des écarts géométriques d'ordres croissants, $m = 1, 2, 3, \ldots$ apportent aux faisceaux électroniques du système idéal des modifications d'importance de plus en plus faible*, si du moins ces écarts sont d'amplitudes comparables.

En fait, les tous premiers ordres interviendront seuls. On ne doit pas perdre de vue, que le report sur φ des symétries de δ n'est valable que pour les petits écarts c'est-à-dire au premier ordre seulement, au même titre que la relation (20).

On le vérifierait facilement sur un cas particulier : soit un système centré idéal dont le potentiel en vertu de (4) présente une expression du type

$$\psi = \Psi_0 - \frac{1}{4}\Psi_0^2 s\bar{s} + \frac{1}{64}\Psi_0^4 s^2\bar{s}^2. \tag{22}$$

Soumettons le à la modification géométrique d'ordre $m = 1$ consistant en une translation perpendiculaire à Oz de vecteur représenté par l'affixe e; la nouvelle distribution de potentiel $\psi + \varphi$ est donnée rigoureusement par (22) où l'on remplace s par $s - e$; on en déduirait l'expression du terme correcteur φ. On verrait ainsi que la partie principale de φ est effectivement d'ordre de symétrie $m = 1$; elle est toutefois accompagnée d'infiniment petits de degré supérieur en e et d'ordres $m > 1$.

Cas du champ magnétique. — Prenons le cas où le système centré est à champ magnétique. Par électrodes S_0, S, il faut entendre ici les armatures des bobines magnétisantes, principalement leurs pièces polaires; ψ et $\psi + \varphi$ désignent d'autre part les potentiels scalaires magnétiques du système idéal Σ_0 et du système réel Σ.

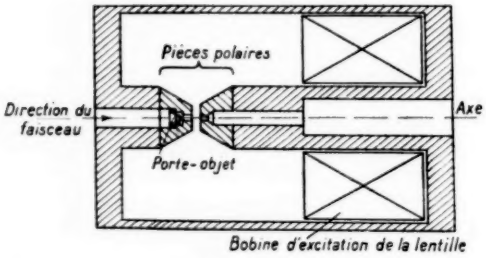


Fig. 7. — Lentille magnétique (d'après von Ardenne).

On sait que de telles fonctions présentent plusieurs déterminations qui toutes, sont constantes à l'infini; leurs variations le long d'un même contour fermé ayant une même valeur proportionnelle au courant encerclé, il en résulte que *leur différence φ est une fonction uniforme, et nulle à l'infini* au même titre que le terme correcteur électrique. On sait d'autre part, que les cas où la perméabilité magnétique μ des armatures serait infinie offrent une grande analogie avec les phénomènes électriques en présence de conducteurs : ils fourniraient en conséquence des résultats à peu près transposés de ceux que nous venons d'obtenir. On peut penser qu'il en est de même par continuité pour de grandes valeurs de μ et une analyse plus détaillée va le montrer. On supposera la quantité $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$ assez petite pour qu'on **néglige par la suite les** termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire en ε^2, $\varepsilon^2\delta$...

M et N désigneront encore les points courants de S_0 et S se faisant vis-à-vis; on notera en M dans Σ_0 : $\vec{h}$ le champ magnétique du côté intérieur à l'armature, $\vec{H}$ le champ du côté extérieur, de composante normale H_n (*fig. 4 b*), h est de l'ordre de ε, puisqu'il s'annule pour $\varepsilon = 0$ ($\mu = \infty$).

Si l'on passe de Σ_0 à Σ système réel, le champ intérieur en M est encore $\vec{h}$: ce champ subit en effet dans ce passage, une variation relative qui est de l'ordre infinitésimal de l'écart δ : cette variation est ainsi de l'ordre de $\varepsilon\delta$, donc négligeable. De plus, le potentiel de M diffère alors de celui $\psi(N) + \varphi(N)$, de N, d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon\delta$; il lui est donc égal.

Envisageons alors, lorsqu'on déplace M le long de S_0, la variation du potentiel $\psi(M)$ de M dans Σ_0 et celle du potentiel $\psi(N) + \varphi(N)$ du point correspondant N dans Σ : elles sont égales puisque les différentielles de ces fonctions sont toutes deux égales à $-\vec{h}\,d\vec{\sigma}$ ($d\vec{\sigma}$ élément d'arc sur S_0).

En conséquence :

$$\psi(N) + \varphi(N) = \psi(M) + K,$$

K étant une constante, d'où résulte, en faisant appel à la définition même de H_n :

$$\psi(N) = \psi(M) - H_n\delta,$$

la relation cherchée entre φ et δ

$$\varphi = H_n\delta + K, \tag{23}$$

le long de S_0, relation semblable à (20), *à la constante K près*, qui n'est pas nulle en général, ainsi qu'on va le montrer.

L'équation (23) *s'appliquera comme* (20) *successivement et indépendamment aux termes des divers rangs et l'on aura des conclusions du même ordre que dans le cas électrostatique.* La constante K n'apparaît que dans l'ordre zéro :

$$\varphi_0 = H_n\delta_0 + K \tag{24}$$

et c'est à l'aide de cette équation qu'on peut la déterminer. Rappelons que, suivant (7), le début du développement de $\varphi_0(rz)$ à l'infini, s'écrit

$$\varphi_0(rz) = \frac{b}{\rho} + \ldots$$

En raison des propriétés linéaires du problème, si l'on considère les $\varphi_0(rz)$ satisfaisant à (24) pour

diverses valeurs de K, le coefficient b correspondant est fonction linéaire de K

$$b = \alpha + \beta K,$$

α et β constantes.

Mais on sait par ailleurs, que les potentiels magnétiques des courants sont des potentiels de dipôle et par suite de degré supérieur à 1 en $\frac{1}{\rho}$; il en est ainsi de $\varphi_0(rz)$, d'où résulte la relation :

$$b = \alpha + \beta K = 0,$$

qui théoriquement permettrait de déterminer K.

Influence de la grandeur d'un écart δ; son volume. — Considérons une bosse arrondie, très petite dans toutes ses dimensions, de forme et grandeur choisies une fois pour toutes; on lui assignera pour simplifier un volume égal à 1. Disposons la au point M de S_0 : elle forme un écart, soit $\varepsilon(M)$ fonction du point M, et crée une certaine loi de potentiel

$$\varphi = \eta(M;\ rz\theta).$$

On conçoit que tout écart géométrique δ puisse être considéré comme formé par superposition de diverses composantes $\varepsilon(M)$ attachées à des M différents et accompagnés de coefficients $c(M)$ appropriés

$$\delta = \sum_M c(M)\,\varepsilon(M).$$

Le volume de δ est alors

$$\mathcal{V} = \sum_M c(M). \tag{25}$$

Le potentiel associé à δ est de son côté

$$\varphi = \sum_M c(M)\,\eta(M;\ rz\theta). \tag{26}$$

Nous l'envisagerons uniquement dans la région de l'axe O z.

Si δ est suffisamment localisé au voisinage d'un point M_0, ses dimensions étant petites vis-à-vis de la distance à O z et des rayons de courbure de S_0, les points M intervenant dans les formules précédentes sont très voisins de M_0, les $\eta(M;\ rz\theta)$ sont assimilables à $\eta(M_0;\ rz\theta)$ de sorte que (26) devient

$$\varphi = \eta(M_0;\ rz\theta)\sum_M c(M)$$

c'est-à-dire d'après (25)

$$\varphi = \mathcal{V}\,\eta(M_0;\ rz\theta). \tag{27}$$

En d'autres termes : *Etant donné un écart localisé au voisinage d'un point déterminé de S_0, le potentiel associé φ dans la région de O z, et par suite, son effet « optique » dépendent de δ, par l'intermédiaire de son volume $\mathcal{V}$, sans égard à sa forme : il est proportionnel à $\mathcal{V}$.*

Il s'ensuit qu'un défaut géométrique quelconque de forme compliquée, peut toujours être remplacé en ce qui concerne son effet optique par un défaut de forme plus simple à condition que la répartition le long de S_0 du volume de l'écart soit à peu près respectée.

Cette observation est à retenir dans la pratique : les défauts ne sont en général connus qu'avec une approximation plus ou moins grossière; il s'agit d'estimer leur volume et nullement leur élongation maximum par exemple, à moins qu'on ne puisse se donner simultanément leur forme approchée.

Si au lieu du δ global, on en considère une composante donnée localisée au voisinage d'une certaine abscisse, soit $\delta_m \cos m\theta$, les mêmes observations s'appliquent; et l'on peut alors considérer, au lieu du volume, *l'aire A de la section de cette composante par le plan de symétrie.* La figure (8) schématise l'équivalence entre un défaut de profil donné et un défaut plus simple dont l'aire présente la même répartition le long de S_0.

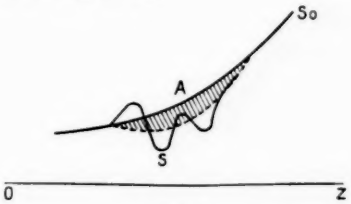


Fig. 8.

On voit ainsi comment un écart intervient par son *étendue*; la suite montrera comment l'effet optique dépend également de sa *position* sur l'électrode.

5. Une famille particulière de potentiels correctifs φ.

La détermination du φ associé à l'écart se réduit à celle des composantes de divers ordres de φ à partir des termes de même ordre de δ. Nous sommes ramenés aux cas purement sinusoïdaux en θ : nous chercherons en conséquence à déterminer φ à partir de δ, c'est-à-dire à résoudre l'équation (20), en supposant par exemple

$$\varphi = \varphi_m(rz)\cos m\theta,$$
$$\delta = \delta_m(z)\cos m\theta.$$

On va d'abord *définir une source de lois de potentiel en* $\cos m\theta$, *à partir desquelles on pourra construire* φ.

Soit un cercle C de centre O, d'axe Oz et de rayon a; nous le supposons porteur d'une densité électrique linéaire égale à $\left(\frac{\cos m\theta}{a}\right)$. Nous étudions la loi de potentiel $v(rz\theta)$ qu'il crée en tout point $(rz\theta)$ de l'espace.

On a

$$v = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\gamma \, d\gamma}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \gamma) + r^2}}.$$

Le changement de variable d'intégration $\theta - \gamma = \zeta$ montre immédiatement que l'on peut écrire

$$(28) \qquad \begin{cases} v(rz\theta) = v_m(rz)\cos m\theta, \\ v_m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos m\gamma \, d\gamma}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma + r^2}}, \end{cases}$$

v est régulier sauf sur le cercle C et s'annule à l'infini. Cette fonction correspond au cas limite $(M \to \infty)$ des systèmes en étoile à électrodes ponctuelles.

Nous obtenons d'autres potentiels en faisant subir à la répartition $v(rz\theta)$, des translations quelconques suivant Oz ou en en prenant les dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport au paramètre a ou à la coordonnée z :

$$\frac{\partial v}{\partial a}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \ldots$$

toutes ces lois sont du type $\varphi = \varphi_m \cos m\theta$ *s'annulant à l'infini*

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial v_m}{\partial a}\cos m\theta, \quad \ldots.$$

On peut obtenir des indications sur leurs propriétés à l'aide de l'étude préliminaire des potentiels statiques. Nous allons en retrouver les résultats de façon précise. On allègera l'écriture *en posant* $a = 1$

$$v_m = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\gamma \, d\gamma}{\sqrt{z^2 + 1 - 2r\cos\gamma + r^2}}.$$

Le rétablissement de a pourra s'obtenir facilement à tout moment à l'aide de raisons d'homogénéité.

A. Étude au voisinage de Oz. — Étant donné

$$(z^2 + 1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}} = (z^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2r\cos\gamma}{1+z^2} + \frac{r^2}{1+z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait d'autre part [2] qu'on peut écrire, si u est assez petit

$$(1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty P_n(x)u^n$$

[$P_n(x)$ polynome de Legendre de degré n].

Il en résulte ici

$$\left(1 - \frac{2r\cos\gamma}{1+z^2} + \frac{r^2}{1+z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty P_n\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\right)\frac{r^n}{(1+z^2)^{\frac{n}{2}}}$$

et par suite

$$v_m = \sum_0^\infty \frac{r^n}{(1+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{2\pi} P_n\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\right)\cos m\gamma \, d\gamma.$$

Nous calculerons seulement le premier terme de ce développement; il nous faut ainsi déterminer la plus petite valeur de n donnant à l'intégrale une valeur $\neq 0$; cette valeur est le degré du premier des polynômes P_n qui contienne $\cos m\gamma$ dans son développement de Fourier. Or, ce polynôme est P_m; il renferme $\cos m\theta$, donc un terme en $\cos m\theta$, que nous évaluons

$$P_m\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}\,\frac{\cos^m\gamma}{(1+z^2)^{\frac{m}{2}}} + \ldots$$

$$= \frac{(2m)!}{2^{2m-1}(m!)^2}\,\frac{\cos m\gamma}{(1+z^2)^{\frac{m}{2}}} + \ldots,$$

En portant dans l'expression de v_m et effectuant l'intégrale nous obtenons ainsi

$$(29) \qquad v_m = \frac{(2m)!\,\pi}{2^{2m-1}(m!)^2}\,\frac{r^m}{(1+z^2)^{m+\frac{1}{2}}} + \ldots.$$

Exemples :

$$v_0 = \frac{2\pi}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \ldots, \qquad v_1 = \frac{\pi r}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots,$$

$$v_2 = \frac{3\pi}{4}\,\frac{r^2}{(1+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \ldots.$$

Le calcul du premier terme des potentiels dérivés s'effectue sans difficulté. Soit à prendre $\frac{\partial v_2}{\partial a}$; les v_m étant de degré (-1) par rapport aux longueurs, l'on doit avoir, dans le cas $a \neq 1$

$$v_2 = \frac{3\pi}{4}\,\frac{a^2r^2}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$(30) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial a} = -\frac{3\pi}{4}\,\frac{3 - 2z^2}{(1+z^2)^{\frac{7}{2}}}\,r^2 + \ldots.$$

B. Étude au loin dans une direction perpendiculaire a Oz. — Nous avons ici un problème tout à fait analogue au précédent, mais il faut appliquer le développement [2]

$$(1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1}{u^{n+1}}P_n(x)$$

valable pour u suffisamment grand, c'est-à-dire :

$$\left(1-\frac{2r\cos\gamma}{1+z^2}+\frac{r^2}{1+z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty P_n\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\right)\frac{(1+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{r^{n+1}}.$$

Nous sommes conduits aux mêmes intégrales que ci-dessus et le résultat s'obtient simplement à l'aide de (29) en y mettant en évidence le facteur

$$\frac{r^m}{(1+z^2)^{\frac{m}{2}}} \quad \text{que l'on remplacera par} \quad \frac{(1+z^2)^{\frac{(m+1)}{2}}}{r^{m+1}},$$

d'où

$$(31) \qquad v_m=\frac{(2m)!\,\pi}{2^{2m-1}(m!)^2}\,\frac{1}{r^{m+1}}+\ldots.$$

Exemple :

$$v_2=\frac{3\pi}{4}\,\frac{1}{r^3}+\ldots.$$

De là on passe aux dérivés en a :

$$\frac{\partial v_2}{\partial a}=\frac{3\pi}{2}\,\frac{1}{r^3}+\ldots.$$

Pour avoir les dérivés en z, on voit qu'il faudrait calculer un terme d'ordre supérieur du développement de v_m; leur décroissance à l'infini est plus rapide que suivant la loi précédente.

Expressions au loin dans une direction quelconque. — La formule (7) fournit la forme *a priori* de la valeur au loin de v_m; si on la rapproche de la relation (31) vérifiée pour $z=0$, cette dernière détermine le coefficient b_m d'où résultent, par exemple, les valeurs

$$(32) \qquad v_2=\frac{3\pi}{4}\,\frac{\sin^2\tau}{\rho^3}+\ldots \qquad \frac{\partial v_2}{\partial a}=\frac{3\pi}{2}\,\frac{\sin^2\tau}{\rho^3}+\ldots.$$

C. Étude au voisinage du cercle C. — Plaçons-nous dans le plan méridien $\theta=0$, de sorte que les $v(rz\,\theta)$ calculés soient les $v_m(rz)$... eux-mêmes.

Nous désignons encore par C, l'une des traces du cercle C dans ce plan. Les potentiels sont infinis sur C; nous cherchons le premier terme de leur expression en tout point M, voisin, que nous repérons par ses coordonnées polaires par rapport à C : l, ω (*fig.* 9).

La partie principale de v_m en M est fournie par l'élément de cercle situé en regard; elle ne dépend pas du reste de la ligne électrisée. Pour l'obtenir il est donc permis de remplacer le cercle par sa tangente en C supposée illimitée et de densité linéaire uniforme égale à $\frac{1}{a}$. On se trouve ainsi ramené à un problème élémentaire :

$$(33) \qquad v_m=-\frac{2}{a}\log l \text{ indépendant de } m.$$

Si l'on tient compte des égalités faciles à établir

$$\frac{\partial l}{\partial a}=-\sin\omega, \qquad \frac{\partial l}{\partial z}=\cos\omega,$$

on en déduit les dérivées premières :

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_m}{\partial a}=\dfrac{2}{a}\,\dfrac{\sin\omega}{l}+\ldots, \\[2ex] \dfrac{\partial v_m}{\partial z}=-\dfrac{2}{a}\,\dfrac{\cos\omega}{l}+\ldots, \end{cases}$$

expressions indépendantes de m.

On pourrait voir que les dérivées d'ordre supérieur font intervenir les lignes trigonométriques des multiples de ω et les puissances de l, mais nous n'aurons pas à les utiliser.

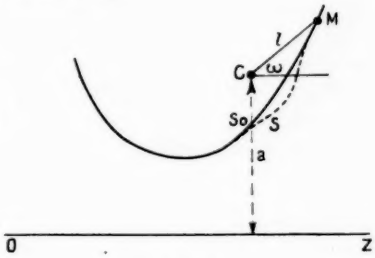


Fig. 9.

Les formules précédentes montrent que *les dérivées ont, au voisinage de C, un comportement très différent de celui de* v_m; en particulier leur signe n'est pas constant : il dépend de l'angle ω et cette remarque est importante pour la suite.

6. Application : détermination pratique de φ.

Principe de la méthode employée. — Étant donnée l'électrode parfaite S_0 créant ψ, imaginons le cercle C de rayon a et d'axe O z, tracé dans le métal de S_0, et envisageons, à l'extérieur de S_0, un des potentiels du type précédent : $\varphi=\varphi_m\cos m\theta$ associé à C.

Ce potentiel peut tout aussi bien être considéré comme étant créé par un défaut $\delta=\delta_m\cos m\theta$ sur S_0 et qu'on va déterminer.

Calculons numériquement la valeur de φ le long de S_0 dans le plan $\theta=0$, soit $\varphi_m(z)$. Nous en tirons en tout point de la méridienne, une fonction $\delta_m(z)$ définie par

$$E(z)\,\delta_m(z)=\varphi_m(z).$$

La méridienne de la surface perturbée S créant précisément φ est celle dont chaque point est à distance $\delta_m(z)$ de S_0; elle est donc connue si E l'est,

ce que nous supposons. On pourrait de même considérer un φ, combinaison linéaire de divers potentiels v ou dérivés, attachés au même cercle C ou à des cercles différents, toujours tracés dans le métal. A l'aide de son évaluation numérique sur S_0, on déterminerait la surface S associée.

On cherchera alors, à l'aide de choix appropriés pour C et pour la combinaison linéaire, à reproduire un φ correspondant à l'écart étudié avec une approximation convenable.

Ce travail est plus simple qu'il n'y paraît au premier abord. D'une part, en effet, en vertu de l'imprécision de la mesure expérimentale des écarts, et de la possibilité de les supposer « arrondis », il s'agira de δ de formes simples. En s'appuyant d'autre part sur les résultats de l'étude des v et dérivés, on pourra avant tout calcul numérique, déterminer dans une large mesure, le choix du ou des cercles C et des fonctions à faire intervenir.

On remarquera en premier lieu, du fait que les potentiels v sont infiniment grands sur C, et s'annulent à l'infini, qu'il y a intérêt dans le cas d'un δ local, *à placer le cercle au voisinage de la zone perturbée (fig. 9)*.

Les formules d'approximation, telles que celles de (31) à (34) renseigneront ensuite sur les valeurs que prennent les diverses fonctions v_m le long de S_0, donc les fonctions $\delta_m(z)$ associées.

Exemple d'obtention de φ : cas d'un écart du deuxième ordre (ellipticité d'une lentille électrostatique). — Nous envisagerons ce cas en raison de son importance. On prendra comme électrode la pièce médiane d'une lentille électrostatique de modèle courant dont H. Bruck [3] a déterminé les diverses caractéristiques en symétrie de révolution [4] : S_0 est constituée essentiellement par un disque métallique percé d'une ouverture circulaire dont le profil est celui d'un demi-tore. Nous désignons par R le rayon du cercle de gorge; l'épaisseur du disque est de l'ordre de $\frac{R}{2}$ (le problème ne nécessite pas la connaissance des dimensions absolues elles-mêmes).

L'étude à la cuve électrolytique montre qu'à l'approximation où nous nous plaçons, *on peut considérer le champ superficiel E comme constant.*

On conçoit que *la réalisation au tour de l'ouverture centrale constitue la source principale des perturbations* apportées à la surface « parfaite »; l'observation à l'aide d'un microscope à faible grossissement montre qu'effectivement cette ouverture n'est pas rigoureusement « ronde »; son contour apparent présente une légère ellipticité qui peut être de l'ordre du 1/100e si l'on n'apporte pas un soin tout particulier à sa réalisation.

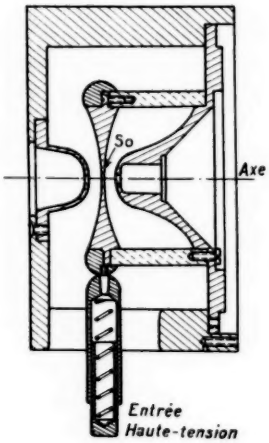


Fig. 10. — Lentille électrostatique (H. Bruck).

En vue d'étudier le φ créé par cet écart $m = 2$, nous le supposerons symétrique par rapport au plan $z = 0$ et de profil simple (*fig.* 11 dans laquelle la distance entre S_0 et S est fortement exagérée).

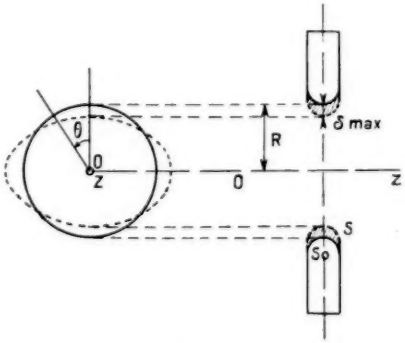


Fig. 11.

On peut écrire :

$$\delta(z\theta) = \delta_2(z)\cos 2\theta,$$

$\delta_2(z)$ étant une fonction positive correspondant à la région hachurée sur la figure 11; elle est pratiquement nulle à l'extérieur de l'ouverture elle-même.

Le maximum absolu δ_{max} de la fonction $\delta_2(z)$ s'obtient pour $\theta = 0$, $z = 0$.

Ces observations nous conduisent à essayer la résolution au moyen d'un cercle C disposé dans

le plan $z = 0$ et de rayon a, un peu supérieur à R; en ce qui concerne d'autre part ses potentiels associés, il y aura lieu de n'envisager que ceux symétriques par rapport à $z = 0$, c'est-à-dire, fonctions paires en z :

$$v = v_2 \cos 2\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial v_2}{\partial a} \cos 2\theta.$$

Nous les examinerons d'abord séparément en mettant leurs propriétés en évidence sur une figure. La figure 12 *a* porte les indications des valeurs asymptotiques de v_2 : sur l'axe Oz (29), au loin dans le plan $z = 0$ (31), au voisinage de C (32); en assimilant v_2 à ces valeurs, nous en déduisons le $\delta_2(z)$ qui lui est directement proportionnel le long de S_0 : d'où la surface S associée à v.

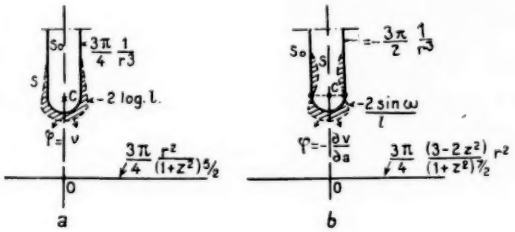


Fig. 12.

La figure 12 *b* donne de même les indications concernant $-\frac{\partial v_2}{\partial a}$. Les formules supposent $a = 1$.

On voit, en rapprochant les figures 12 de la figure 11, que les écarts associés respectivement à v et $-\frac{\partial v}{\partial a}$ ne représentent qu'imparfaitement le défaut à reconstituer. Ils s'étendent en effet non seulement à l'ouverture de S_0 où ils prennent leurs valeurs les plus grandes, mais aussi aux faces planes extérieures.

Choix de $\delta = 2v - \frac{\partial v}{\partial a}$. — Au contraire, si nous essayons la combinaison $2v - \frac{\partial v}{\partial a}$, nous pouvons prévoir qu'elle s'adaptera de façon bien meilleure au problème. Ses deux termes s'additionnent en effet arithmétiquement sur le demi-tore, alors qu'ils se retranchent sur les flancs de S_0 de telle manière que $2v - \frac{\partial v}{\partial a}$ s'y trouve d'ordre infinitésimal supérieur à $\frac{1}{r^3}$.

Nous adoptons cette nouvelle fonction et passons au calcul numérique. Précisons les grandeurs géométriques : la cote de C étant $a = 1$, nous supposerons par exemple que *C coïncide avec le cercle moyen du demi-tore de la lentille*, le disque ayant une épaisseur égale à 0,4 d'où $R = 0,8$; une homothétie fera passer ultérieurement aux dimensions exactes.

L'expression à évaluer sur S_0 : $2v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial a}$ met en jeu d'après (28) deux intégrales où figure essentiellement la distance d'un point M aux divers points d'un cercle, un procédé de calcul graphique facile à imaginer sera particulièrement commode surtout si l'on tient compte du degré de précision admissible. Le tableau ci-dessous fournit les valeurs obtenues ainsi pour $E\delta_2$ en six points du profil de S_0 (*fig.* 13).

(α) par le calcul numérique,

(β) par les formules asymptotiques valables au voisinage de C : (33) et (34),

(γ) par celles valables au loin : (31).

$$E\,\delta_2 = 2v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial a}.$$

Points de S_0.	(α).	(β).	(γ).
M_0	14	16	–
M_1	12	13	–
M_2	4,5	6	–
M_3	— 0,5	0	0
M_4	— 0,5	–	0
M_5	— 0,1	–	0

(Les derniers nombres de la colonne (α) représentent seulement des valeurs par excès.)

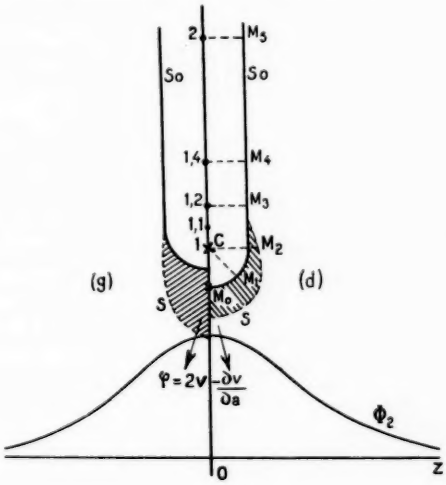


Fig. 13.

La moitié droite de la figure (13) montre l'allure (écart fortement amplifié) du profil de l'électrode S perturbée par le δ ainsi défini.

La moitié gauche fournit, de même, le cas d'une électrode dont *le cercle de gorge aurait un rayon*

égal non plus à 0,8 *mais à* 0,9, φ et E ayant les mêmes valeurs que dans la première éventualité, et a étant toujours égal à 1.

On voit clairement en quoi diffèrent les deux perturbations. Dans la première (*d*) le défaut déborde légèrement du demi-tore; δ est d'autre part pratiquement constant sur une partie de la surface incurvée et

$$E\,\delta_{\max} \# 14.$$

Dans la deuxième disposition (*g*) le défaut n'affecte que la zone du demi-tore; δ décroît rapidement à partir du cercle de gorge où il atteint un maximum sensiblement supérieur à celui de (*d*); on trouve

$$E\,\delta_{\max} \# 30.$$

Les cas (*d*) et (*g*) sont équivalents en ce sens qu'ils possèdent le même φ qu'il nous reste à calculer maintenant dans la région de Oz; on tire de (29) et de (30) :

$$\varphi = \varphi_2 \cos 2\theta, \qquad \varphi_2 = \frac{15\pi}{4}\,\frac{r^2}{(1+z^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Cette formule est valable pour des valeurs particulières du rayon du cercle de gorge R (0,8 et 0,9) et de $E\delta_{\max}$ (14 et 30). Il reste à y faire apparaître ces deux paramètres à l'aide de considérations d'homogénéité de façon qu'elle soit applicable aux divers problèmes « homothétiques ». Notons qu'il n'y a plus lieu maintenant de faire intervenir le cercle C.

Le résultat est le suivant, avec rappel des hypothèses de base :

Soient *la pièce centrale d'une lentille à trois électrodes*, R le rayon de son cercle de gorge, supposé de l'ordre du double de l'épaisseur, E le champ superficiel le long de ce cercle. On suppose cette pièce affectée d'une *perturbation géométrique* $\delta = \delta_2 \cos 2\theta$, la variation de δ_2 le long de la méridienne étant d'un des deux types (*d*) ou (*g*). Soit $\delta_{\max}$ son maximum. Cette perturbation crée un *champ parasite* $\varphi = \varphi_2 \cos 2\theta$ que définissent *dans la région « optique »* (voisinage de Oz) les formules

$$(35)\quad \begin{cases} \varphi_2 = 0{,}55\,E\,\delta_{\max}\dfrac{1}{\left(1+0{,}64\,\dfrac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}}\,\dfrac{r^2}{R^2} & \text{(type } d\text{)}, \\[2ex] \varphi_2 = 0{,}32\,E\,\delta_{\max}\dfrac{1}{\left(1+0{,}8\,\dfrac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}}\,\dfrac{r^2}{R^2} & \text{(type } g\text{)}. \end{cases}$$

Dans la réalité la distinction entre deux tels cas est dépourvue de valeur, car il est clair que les tentatives de détermination expérimentale des écarts vis-à-vis de la symétrie de révolution ne peuvent guère que fournir approximativement $\delta_{\max}$ sans indication précise sur la répartition de l'écart le long du méridien. Aussi ne pouvons-nous compter que sur la *connaissance d'un ordre de grandeur de* φ_2 *et adopter si l'on veut, une formule « moyenne »*, par exemple :

$$(36)\quad \boxed{\varphi_2 = 0{,}4\,E\,\delta_{\max}\frac{1}{\left(1+0{,}7\,\dfrac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}}\,\frac{r^2}{R^2}}$$

(6) permet d'en déduire l'expression de la fonction Φ_2 dont la courbe représentative est reportée sur la figure 13

$$(37)\quad \Phi_2 = 1{,}6\,\frac{E\,\delta_{\max}}{R^2}\,\frac{1}{\left(1+0{,}7\,\dfrac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

CHAPITRE II.

Aberrations optiques des systèmes centrés perturbés.

7. Équation des trajectoires.

Pour passer à l'étude optique des systèmes de révolution présentant des écarts vis-à-vis de leur état « idéal », on établira tout d'abord l'*équation générale des trajectoires électroniques dans l'ensemble de deux champs, électrique et magnétique, supposés quelconques.*

Il ne sera pas tenu compte pour le moment de l'*effet de relativité* mis en jeu si les électrons sont suffisamment rapides. On sait que cet effet peut être sensible; toutefois, le calcul que nous en ferons par la suite montrera qu'il s'agit là de modifications accessoires en ce qui concerne le sujet traité. On négligera de même les actions répulsives mutuelles entre particules (charge d'espace), l'aberration chromatique due à ce que ces dernières ne sont pas strictement monocinétiques et enfin la diffraction occasionnée par les ondes associées. Ces phénomènes correctifs sont envisagés dans les études classiques des systèmes centrés [4] et ne nécessitent pas ici une étude différente.

Nous utiliserons le système de coordonnées : z, $s = re^{i\theta}$; il allège notablement l'écriture et permet de voir plus facilement la signification des équations. De façon générale toute grandeur définie par deux projections suivant les axes Ox, Oy (Ex. : vecteur champ normal à Oz) sera repré-

sentée par son affixe dans les plans transversaux décrits par s et jouant le rôle de plans complexes.

Les notations concernant les champs auront dorénavant les significations suivantes :

$\varphi(rz\theta)$ potentiel total du champ électrique;
$\Phi_m(z)$ composantes correspondantes;
$\vec{A}(rz\theta)$ potentiel vecteur du champ magnétique (composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z);
$\psi(rz\theta)$ son potentiel scalaire;
$\Psi_m(z)$ ses composantes.

Nous déterminerons les trajectoires à l'aide d'une méthode couramment employée dans les cas plus simples de systèmes présentant certaines symétries (systèmes centrés, etc.).

Cette méthode se fonde sur le *principe de moindre action* de Maupertuis étendu au mouvement de particules électrisées dans un champ électromagnétique [5] : on considère l'intégrale $\int_A^{A'} \mu\, d\sigma \left(\vec{d\sigma}\right.$ élément d'arc$\left.\right)$ prise le long d'une ligne joignant deux points quelconques A A' : μ y désigne la fonction

$$\mu = \sqrt{\varphi} - \eta \vec{A} \frac{\vec{d\sigma}}{d\sigma},$$

où η est une constante dont la valeur est donnée plus loin; l'intégrale précédente est stationnaire si la ligne est une trajectoire.

Posons alors

$$(38) \quad L = \sqrt{\varphi}\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} - \eta(A_x x' + A_y y' + A_z),$$

l'accentuation indiquant dans la suite la dérivation totale par rapport à la variable z; les équations d'Euler fournissent les équations différentielles des trajectoires sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(39) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{\varphi}\, x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} - \eta A_x\right) \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &+ \eta\left(x'\frac{\partial A_x}{\partial x} + y'\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0, \end{aligned}$$

et la relation analogue où x est remplacé par y.

Si toutes les grandeurs sont évaluées dans le système électromagnétique C. G. S., η désigne la constante

$$\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}_{(\text{U. É. M. C. G. S.})} = 0{,}99 . 10^{-7}.$$

On conviendra, sauf mention contraire, d'adopter les unités pratiques de champs (potentiels) : *volt, volt-cm, gauss*, de sorte que l'on aura en raison de la structure des équations

$$(40) \quad \boxed{\eta = 10^4 \sqrt{\frac{e}{2mc^2}}_{(\text{U. É. M. C. G. S.})} = 0{,}99 . 10^{-3}.}$$

Exprimons maintenant (39) dans le système de coordonnées s, z : à l'aide des formules de passage

$$x = \frac{1}{2}(s + \bar{s}), \qquad y = -\frac{i}{2}(s - \bar{s}),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \bar{s}}\right),$$

les deux équations deviennent

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varphi}(s' + \bar{s}')}{\sqrt{1 + s'\bar{s}'}} - \eta A_x\right) \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\sqrt{1 + s'\bar{s}'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}}\right) + \eta\left(x'\frac{\partial A_x}{\partial x} + \ldots\right) = 0. \\ &\frac{d}{dz}\left(-\frac{i}{2}\frac{\sqrt{\varphi}(s' - \bar{s}')}{\sqrt{1 + s'\bar{s}'}} - \eta A_y\right) \\ &- \frac{i}{2\sqrt{\varphi}}\sqrt{1 + s'\bar{s}'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}}\right) + \eta\left(x'\frac{\partial A_x}{\partial y} + \ldots\right) = 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par 1, la deuxième par i et additionnons; si l'on remplace $\frac{d}{dz}$ pour φ et A en fonction des dérivées partielles

$$\frac{d}{dz} = s'\frac{\partial}{\partial s} + \bar{s}'\frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial}{\partial z},$$

on voit apparaître les composantes du champ magnétique rot $\vec{A}$, ce qui nous ramène à la fonction ψ et à ses dérivées. La composante suivant O z étant

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Celle suivant le plan transversal étant d'autre part

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2\frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Tous calculs faits, on obtient ainsi une seule équation indépendante

$$(41) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}s' + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}}\bar{s}' + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{s'}{\sqrt{1 + s'\bar{s}'}} + \varphi\frac{d}{dz}\frac{s'}{\sqrt{1 + s'\bar{s}'}} \\ &- \sqrt{1 + s'\bar{s}'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}} + i\eta\sqrt{\varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}s' - 2\frac{\partial \psi}{\partial s}\right) = 0, \end{aligned}}$$

relation unique équivalente aux deux équations réelles (39).

Cas ou le champ est purement électrique : développement de l'équation (41), Classement des divers termes. — On supposera jusqu'à nouvel ordre qu'*il n'existe pas de champ magnétique dans le système* Σ, même à titre de perturbations : le dernier terme de l'équation précédente est donc à supprimer. Comme dans tout calcul d'aberration, on ne considère que les trajectoires voisines de l'axe Oz du système : s et $\bar{s}$ sont des quantités très petites et nous développons l'équation (41) *jusqu'aux termes du troisième ordre inclus en s et $\bar{s}$*; on obtient un résultat pouvant s'écrire sous la forme suivante mettant en évidence sa structure

$$(42)\quad \{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} + \{\Phi_0 s^3\} + \{\Phi_1 s^2\} + \{\Phi_2 s\} + \{\Phi_2 s^3\} + \{\Phi_2 s^2\} + \{\Phi_1 s^3\} = 0$$

ou sous une forme plus condensée

$$(42)\quad \boxed{\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} + \mathfrak{A} = 0}$$

avec

$$\mathfrak{A} = \{\Phi_0 s^3\} + \{\Phi_1 s^2\} + \ldots.$$

Les accolades ont les expressions

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
\{\Phi_0 s\} &= \Phi_0 s'' + \frac{\Phi_0^1}{2} s' + \frac{\Phi_0^2}{4} s,\\
\{\Phi_1\} &= -\frac{\overline{\Phi}_1}{2},\\
\{\Phi_0 s^3\} &= -\Big[\frac{\Phi_0}{2}(2s'\bar{s}'s'' + s'^2 s'') + \frac{\Phi_0^1}{4} s'^2\bar{s}' + \frac{\Phi_0^2}{8}(2s\bar{s}s'' + s'^2 s)\\
&\qquad + \frac{\Phi_0^3}{8} s\bar{s}s' + \frac{\Phi_0^4}{32} s^2\bar{s}\Big],\\
\{\Phi_1 s^2\} &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\Phi_1}{2}(2ss'' + s'^2) + \overline{\Phi}_1 \bar{s}s'' + \frac{\Phi_1^1}{2} ss' + \frac{\overline{\Phi}_1^1}{2}\bar{s}s' + \frac{\Phi_1^2}{8} s^2 + \frac{\overline{\Phi}_1^2}{4} s\bar{s}\Big].\\
\{\Phi_2 s\} &= -\frac{1}{4}\Phi_2 \bar{s},\\
(\{\Phi_2 s^3\} &=),\\
\{\Phi_2 s^2\} &= -\frac{1}{16}\Phi_2 \bar{s}^2,\\
\{\Phi_1 s^3\} &= -\frac{1}{96}\Phi_1 \bar{s}^3,
\end{aligned}\right.$$

On voit que *chaque accolade symbolise l'ensemble des termes dont les degrés sont ceux de la quantité entre accolades*, sans distinguer en cela entre une fonction et ses conjuguées ou dérivées par rapport à z (rappelons que pour une question de commodité d'écriture, les indices supérieurs portant sur les fonctions composantes représentent des indices de dérivation).

(42) constitue l'équation fondamentale des trajectoires; nous supposerons que $\Phi_0(z)$ n'est pas petit, ce qui est toujours possible : il ne peut, en effet, être identiquement nul, sinon les électrons seraient immobiles; au cas où d'autre part il serait petit, il suffirait de multiplier $\varphi(r\,z\,\theta)$ par un nombre suffisant pour obtenir un autre ordre de grandeur sans que cela influe sur les trajectoires.

En ce qui concerne $\Phi_1(z)$, l'équation (42) le suppose *nécessairement petit*; dans l'éventualité contraire, elle contiendrait un terme de grandeur finie, $\{\Phi_1\}$, incompatible avec la grandeur des autres termes. Autrement dit, l'équation suppose voisines de zéro, les composantes du champ d'ordre $m = 1$: $\varphi_1 \cos\theta$ et $\varphi_1' \sin\theta$. Moyennant cette condition elle définit, dans une région suffisamment voisine de Oz, les trajectoires de champs quelconques, ainsi que la suite le montrera.

Si nous appliquons (42) à notre problème même de système centré perturbé par des écarts, le symbole φ représente le potentiel total de Σ, qu'on a noté dans une étude précédente : $\psi + \varphi$: potentiel du système idéal + terme correctif. ψ ne fournissant de contribution que dans $\Phi_0(z)$, *les fonctions* $\Phi_m(z)$, $(m > 1)$ *sont celles du terme correctif lui-même; elles sont alors à considérer comme infiniment petits au même titre que s*, de sorte que l'*équation* (42) *pourra être réduite à un nombre de termes moindre, suivant la structure du champ, c'est-à-dire suivant les importances relatives de* $\Phi_m(z)$, *ces fonctions étant, rappelons-le*, a priori *indépendantes les unes des autres.*

L'équation (42) se réduit par exemple à

$$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_0 s^3\} = 0$$

dans le cas classique où l'on envisage seulement les aberrations du système de révolution Σ_0 lui-même : $\Phi_m(z) \equiv 0$ pour $m \geq 1$.

8. Les rôles des différents termes de l'équation.

Nous allons, en mettant progressivement en jeu les différents termes, observer le caractère propre de leurs actions respectives et obtenir en outre la formule générale de résolution.

La considération des deux premiers termes de (42) (linéaires en s, s', s''), constitue une première approximation, l'*approximation de Gauss*, que nous noterons simplement AG.

On supposera une fois pour toutes le *champ nul dans les milieux extrêmes*, lieux des points objets et de leurs images; les trajectoires y sont alors des droites et l'on sait que cette restriction, vérifiée couramment en pratique, permet ainsi une analogie plus grande avec l'optique lumineuse.

TRAJECTOIRES DANS LES CHAMPS DE RÉVOLUTION (AG)

$\{\Phi_0 s\} = 0$:

$$\Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{\Phi''_0}{4} s = 0. \tag{44}$$

Rappelons que de cette équation différentielle, homogène, à coefficients réels, résultent les propriétés de focalisation : les trajectoires issues d'un point objet convergent toutes en un point image.

TRAJECTOIRES DANS LES CHAMPS AFFECTÉS D'UNE DISSYMÉTRIE D'ORDRE $m = 1$ (A G)

$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} = 0$:

$$\Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{\Phi''_0}{4} s - \frac{\overline{\Phi}_1}{2} = 0. \tag{45}$$

D'après l'étude antérieure, l'existence de Φ_1 peut provenir par exemple d'écarts géométriques d'ordre 1, c'est-à-dire de *légers décentrages des électrodes* venant détruire la symétrie de révolution du système.

L'équation obtenue est toujours linéaire du deuxième ordre en s, mais elle n'est pas homogène; on sait que ses intégrales peuvent s'écrire sous la forme :

intégrale quelconque de (44) + intégrale particulière de (45).

Cette dernière sera par exemple, la trajectoire notée $s = \zeta(z)$ confondue avec l'axe O z dans le milieu objet. Il en résulte que les *propriétés de focalisation existent encore* : l'introduction de la composante Φ_1 a comme seul effet de faire subir à chaque plan conjugué image z, donc à chaque image, la translation d'affixe $\zeta(z)$ dans ce plan lui-même (*fig.* 14 *a*).

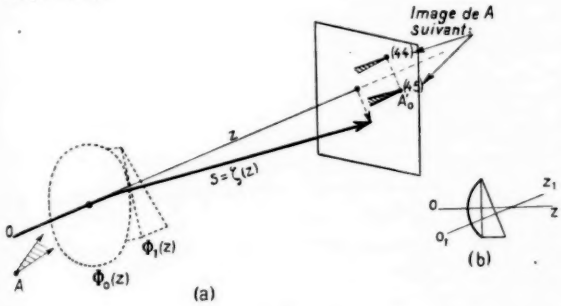


Fig. 14.

Prenons le cas où $\Phi_0(z)$ ne se réduit pas à une constante : pour parler le langage de l'optique ordinaire, *l'action de* Φ_1 dans l'A G est celle d'un *prisme de petit angle* mis à la suite du système centré représenté par Φ_0.

Il existe une trajectoire et une seule dont les parties incidente et émergente ont même support, soit $O_1 z_1$. La propriété est évidente si l'on envisage une lentille plan convexe et un prisme accolés (*fig.* 14 *b*); elle découle de la correspondance homographique entre les rayons des deux milieux extrêmes et s'applique donc très généralement. On pourra appeler $O_1 z_1$, *axe optique de* Σ : si l'on prend comme référence un système dont l'axe polaire est non plus O z mais $O_1 z_1$, Φ_1 n'intervient plus à l'approximation de Gauss, car les translations des plans images qui traduisent son action sont alors nulles; Σ apparaît comme étant un *système centré sur* $O_1 z_1$.

Si $\Phi_0(z)$ se réduit à une constante, Σ équivaut à un simple prisme de petit angle et ce cas s'observera dans l'examen des systèmes correcteurs.

TRAJECTOIRES DANS LE CAS GÉNÉRAL. — Supposons maintenant qu'on ne puisse négliger le terme $\mathfrak{A}$ dans la relation (42) : cette équation n'est plus analytique en s car elle fait intervenir s et ses dérivées. Les propriétés de focalisation s'appuyaient en partie sur le caractère analytique : elles n'existent donc plus actuellement et aux points objets ne correspondent plus de points images.

Toutefois si Φ_2 est petit, c'est-à-dire, s'il provient d'un « écart », et quel que soit par ailleurs l'ordre de grandeur des Φ_m ($m > 2$), $\mathfrak{A}$ est un terme correctif vis-à-vis de $\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\}$; autrement dit les propriétés de focalisation subsistent en première approximation : *les écarts apparaissent sous forme d'aberration. Nous nous placons dans ce cas par la suite.*

9. Résolution de l'équation : aberration de rayons.

Définissons d'abord les éléments du système optique qui joueront un rôle permanent dans la suite.

On envisage un plan objet déterminé perpendiculaire à O z, d'abscisse $z = a$. Les points objets A seront définis dans ce plan par leur affixe $s = re^{i\theta}$ notée u. On appellera A'_0 les points images qui leur correspondent dans l'équation d'approximation de Gauss (45), γ le grossissement correspondant; les points A'_0 se trouvent dans le plan conjugué P' d'abscisse $z = a'$.

On devra tenir compte également du diaphragme d'ouverture D limitant les faisceaux. D sera supposé circulaire, perpendiculaire à l'axe O z, d'abscisse $z = d$. Il ne sera pas obligatoirement centré sur l'axe et nous désignerons par v_d l'affixe de son centre (*fig.* 15).

Il nous faut encore définir la trajectoire générale de l'équation homogène (44). A cet effet, nous consi-

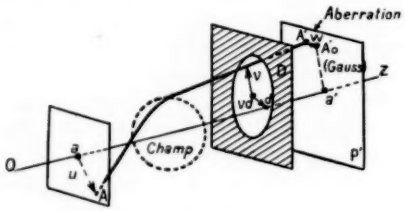


Fig. 15.

dérons les deux trajectoires particulières, supposées connues

$$s = s_{10}(z), \qquad s = s_{01}(z)$$

définies par les conditions

$$(46) \qquad \begin{cases} s_{10}(a) = 1, & s_{10}(d) = 0, \\ s_{01}(a) = 0, & s_{01}(d) = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire par des propriétés simples représentées sur la figure 16.

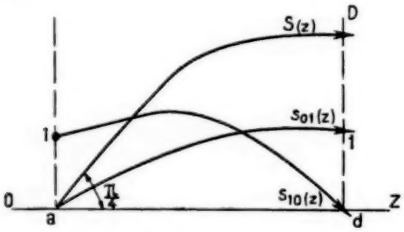


Fig. 16.

La trajectoire générale de (44) est alors déterminée par l'équation

$$s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01},$$

c_1 et c_2 étant deux constantes arbitraires.

En vue de son rôle futur on envisagera encore la trajectoire particulière $S(z)$ définie par

$$S(a) = 0, \qquad S'(a) = 1.$$

Nous allons voir maintenant les résolutions de l'équation de Gauss non homogène (45) et de l'équation totale (42).

Equation (45). — La méthode de variation des constantes [6] en donne la solution particulière $s = \zeta(z)$

$$\zeta(z) = -\int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t)} \frac{1}{\Phi_0(t)} \left[-\frac{\overline{\Phi}_1(t)}{2}\right] dt.$$

Le dénominateur figurant dans l'intégrale peut s'écrire de façon plus simple [6], en vertu des propriétés des équations différentielles linéaires

$$s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t) = K e^{-\int_a^t \frac{\Phi'_0}{2\Phi_0} dt},$$

c'est-à-dire, si l'on tient compte de sa valeur $s'_{01}(a)$ pour $z = a$

$$s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t) = s'_{01}(a)\sqrt{\frac{\Phi_0(a)}{\Phi_0(t)}},$$

d'où

$$(47) \qquad \zeta(z) = -\frac{1}{s'_{01}(a)\sqrt{\Phi_0(a)}} \times \int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} \left[-\frac{\overline{\Phi}_1(t)}{2}\right] dt.$$

L'intégrale générale de (45) est ainsi

$$(48) \qquad s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta.$$

(47) se simplifie pour $z = a'$: le déplacement de l'image de Gauss causé par Φ_1 peut s'écrire

$$\zeta(a') = \gamma \mathcal{L}\{\Phi_1\},$$

le symbole $\mathcal{L}$ ayant la signification indiquée plus loin (50)

Equation complète (42) : *expression de l'aberration.* — L'expression (48) fournit la solution générale approchée de (42) puisque $\mathfrak{A}$ est un terme correctif.

On peut obtenir une solution plus rigoureuse à l'aide d'*approximations successives*, en se bornant ici à la première approximation; il s'agit là d'une méthode classique dans les problèmes d'aberrations [7]. $\mathfrak{A}$ étant une fonction de la solution $s(z)$ elle-même, on y remplace $s(z)$ par la valeur approchée (48); nous sommes ainsi ramenés à une équation du même type que (45) c'est-à-dire linéaire et de terme non homogène connu. La solution peut en vertu de la linéarité être considérée comme étant la somme :

Solution générale de (45) + solution particulière de $\{\Phi_0 s\} + \mathfrak{A} = 0$.

Cette dernière s'écrit sous la forme (47) à condition d'y remplacer $\left[-\frac{\overline{\Phi}_1}{2}\right]$ par $\mathfrak{A}(c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta)$ de sorte que l'intégrale générale de (42) est en définitive

$$s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta - \frac{1}{s'_{01}(a)\sqrt{\Phi_0(a)}} \times \int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} \mathfrak{A}(c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta)(t)\, dt.$$

Il est possible de déterminer en fonction de c_1 et c_2

les paramètres suivants d'une signification physique simple :

u, affixe du point objet origine;

v, affixe du point d'impact de la trajectoire dans le plan du diaphragme, rapportée au centre de D (l'affixe par rapport à Oz en est donc $v_0 + v$) (*fig.* 15).

Inversement, nous remplacerons c_1 et c_2 en fonction de u et v, ce qui donne

$$s = us_{10} + [v + v_0 - \zeta(d)]s_{01} + \zeta + \frac{1}{s'_{01}(a)\sqrt{\Phi_0(a)}}$$
$$\times \left[s_{10}(z)\int_a^z s_{01}(t) - s_{01}(z)\int_d^z s_{10}(t) \right]$$
$$\times \frac{\mathfrak{A}\left[us_{10} + \left(v + v_0 - \zeta(d)\right)s_{01} + \zeta\right](t)}{\sqrt{\Phi_0(t)}}\,dt.$$

Les trois premiers termes du deuxième membre fournissent une trajectoire de Gauss, reliant A et A'_0; en conséquence, le dernier terme représente l'écart entre cette trajectoire et une trajectoire réelle.

La valeur de ce terme pour $z = a'$, soit w, est l'affixe représentative de l'écart $A'_0 A'$ existant dans le plan image, entre l'image de Gauss et l'impact exact du rayon défini par les paramètres u, v (fig. 15).

C'est l'*aberration propre au rayon* (u, v) mesurée dans le plan image; son expression peut se mettre sous la forme

$$(49) \qquad \boxed{A'_0 A' \equiv w = \gamma \mathfrak{L}\mathfrak{A}[us_{10} + (v + v_0 - \zeta(d)s_{01} + \zeta],}$$

en posant

$$(50) \qquad \boxed{\mathfrak{L} f(z) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0(a)}}\int_a^{a'} \frac{S(t)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} f(t)\,dt.}$$

Le symbole $\mathfrak{L}$ représente un opérateur faisant correspondre à toute fonction $f(z)$ celle définie par la formule précédente. On remarquera que $\mathfrak{L} f(z)$ est une fonction continue de la position a de l'objet, même au voisinage du foyer.

Étant donnée d'autre part l'expression de $\mathfrak{A}$ [(42), (43)], la notation $\mathfrak{A}$ [ ] représente la fonction obtenue en y remplaçant s, ses dérivées et conjugués, par la quantité entre crochets, ses dérivées et conjugués.

Rappelons que les formules ainsi obtenues ne fournissent que la première approximation, c'est-à-dire la partie principale en ce qui concerne le rôle optique du terme $\mathfrak{A}$; l'expérience de son côté ne donne pas autre chose. Aussi n'y a-t-il lieu de tenir compte que de la partie principale de $\mathfrak{A}$: les éléments du développement de (41) que nous n'avons pas écrits sont, en s, de degré supérieur à 3 et par suite sont à négliger.

On pourra omettre également les termes suivants :

$\{\Phi_2 s^3\}$ masqué par $\{\Phi_2 s\}$,

$\{\Phi_3 s^2\}$, $\{\Phi_4 s^3\}$ même observation, car Φ_3 et Φ_4

sont, sauf cas spéciaux, du même ordre de grandeur que Φ_2; ces termes ont leur origine dans de mêmes défauts géométriques globaux affectant *a priori* de façon semblable les divers ordres de symétrie.

10. Aberrations : divers types.

$\mathfrak{L}$ étant un opérateur *linéaire* d'après sa définition (50), si l'on remplace $\mathfrak{A}$ par sa valeur (42) dans la formule (49) donnant l'aberration w du rayon (u, v), on voit que *w est un polynome du troisième degré en u, $\bar{u}$, v, $\bar{v}$.* Ses coefficients se calculent à l'aide d'intégrales faisant intervenir les composantes du champ et deux trajectoires particulières du système idéal; ils ne sont pas indépendants les uns des autres en raison de l'existence de surfaces d'ondes normales aux rayons. On précisera ce point suivant un procédé dont l'application aux systèmes rigoureusement centrés est classique.

Considérons dans l'espace image (dénué de champ) la famille des surfaces d'onde correspondant au point objet A

$$\Omega(xyz) = C,$$

on peut supposer $|\operatorname{grad}\Omega| = 1$, ces surfaces étant parallèles.

Soient $p(xyz)$, $q(xyz)$ les cosinus directeurs du rayon passant par le point (xyz); ils sont reliés à $\Omega(xyz)$ par $p = \frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $q = \frac{\partial\Omega}{\partial y}$, d'où résulte l'égalité $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Nous exprimons cette dernière relation en tout point du plan du diaphragme, en supposant ce dernier situé effectivement dans l'espace image; on vérifie aisément qu'on peut l'écrire encore

$$\text{Partie imaginaire}\left[\frac{\partial(p + iq)}{\partial v}\right] = 0$$

p et q s'explicitent d'autre part, en fonction des coordonnées du rayon dans les plans $z = d$ et $z = a'$, c'est-à-dire en fonction de v et w. On trouve ainsi que la partie principale de l'expression précédente est simplement $\frac{\partial(w - v)}{\partial v}$.

La condition s'écrit par suite

$$(51) \qquad \boxed{\text{p. im.}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0,}$$

d'où découlent *certaines relations entre les coefficients du polynome w.*

Le cas où D ne serait pas dans l'espace image conduirait à la même conclusion.

Passons maintenant à l'examen de la figure d'aberration fournie par l'ensemble des rayons issus de A; on l'obtient en portant à partir de A'_0 les diverses affixes $A'_0A' = w$ correspondant à l'ensemble des valeurs de v *décrivant l'ouverture du diaphragme* : $|v| \leq V$.

L'étude de cette figure nécessite donc l'étude de w considéré comme polynome en v et $\bar{v}$, la variable u ne figurant que dans les coefficients variables seulement d'un point A à un autre. Les divers termes de ce polynôme constituent autant de composantes de l'aberration totale, dont chacune présente une structure caractéristique. On en observe la superposition, mais suivant les circonstances certains peuvent être prépondérants de sorte que les composantes correspondantes sont alors bien apparentes.

Si nous prenons d'abord le cas particulier d'un système strictement de révolution ($\Phi_m \equiv 0$ pour $m \geq 1$), w se met sous la forme bien connue

$$w = w_d + w_c + w_a + w_k + w_\sigma,$$

où les divers termes sont

$$(52)\quad \begin{cases} w_d = \gamma D_1 u^2 \bar{u} & \text{distorsion,} \\ w_c = \gamma C_1 u \bar{u} v & \text{courbure du champ,} \\ w_a = \gamma A_1 u^2 v & \text{astigmatisme,} \\ w_k = \gamma (K_1 \bar{u} v^2 + 2 \bar{K}_1 u v \bar{v}) & \text{coma} \\ w_\sigma = \gamma \sigma v^2 \bar{v} & \text{aberration sphérique,} \end{cases}$$

Dans le cas général nous trouvons tout d'abord des termes de même structure en v et $\bar{v}$ que les précédents, et présentant par suite les mêmes significations géométriques que nous rappellerons [4], [7].

1° *Terme de degré* 0 : *Distorsion*

$$(53)\quad w_d = \gamma (D_1 u^2 \bar{u} + {}_2 u^2 D + D_2 u \bar{u} + D_1 u + D \bar{u} + D'),$$

w_d est fourni par le rayon moyen du faisceau ($v = 0$); il existe pratiquement seul si le diaphragme D est suffisamment étroit : à chaque point objet A correspond alors un point d'impact A' constituant l'élément d'une pseudo-image déformée de l'objet.

2° *Termes en v et $\bar{v}$* :

Courbure du champ :

$$(54)\qquad w_c = \gamma v (C_1 u \bar{u} + C_2 u + \bar{C}_2 \bar{u} + C),$$

Astigmatisme :

$$(55)\qquad w_a = \gamma v (A_1 u^2 + A_2 u + A).$$

(C_1, C, A sont réels). Le faisceau émergent s'appuie sur deux focales rectangulaires; une section intermédiaire constitue le cercle de moindre diffusion. — On note les deux cas particuliers suivants :

$w_c = 0$ (cercle de moindre diffusion dans le plan conjugué P'),

$w_a = 0$ (focales confondues en un point).

3° *Termes en v^2 et $v\bar{v}$* : *Coma*

$$(56)\qquad w_k = \gamma v^2 (K_1 \bar{u} + K) + 2 \gamma v \bar{v} (\bar{K}_1 u + \bar{K})$$

section par P' en pointe dont l'angle est de 60°.

4° *Terme en $v^2 \bar{v}$* : *Aberration sphérique* :

$$(57)\qquad w_\sigma = \gamma \sigma v^2 \bar{v}, \qquad [\sigma \text{ est réel}].$$

Section par P' circulaire.

On verra facilement que ces divers termes ont comme origines possibles les éléments $\{\ \}$ de $\mathfrak{A}$ suivants :

Distorsion.....	tous les $\{\ \}$	
Astigmatisme.....	—	—
Courbure du champ.....	$\{\Phi_0 s^3\}$	$\{\Phi_1 s^2\}$
Coma.....	—	—
Aberration de sphéricité.....	$\{\Phi_0 s^3\}$	

5° *Termes caractéristiques de dissymétries d'ordre* >2 — Ce sont des termes en v^2 et $\bar{v}^2$ dus respectivement à $\{\Phi_2 s^2\}$, $\{\Phi_1 s^2\}$; il leur correspondrait des sections circulaires par le plan P'. Du fait de leur association avec des termes des types précédents l'on peut aisément se rendre compte que les sections observées sur le faisceau présentent des formes en rosaces de même ordre de symétrie.

Rappelons du reste que les aberrations de cette dernière rubrique n'apparaîtront pas, à moins que celles dues à $\{\Phi_2 s\}$ ne soient nulles.

En raison de la continuité de l'expression (50) en fonction de l'abscisse a, les divers coefficients littéraux des formules précédentes, à l'exception de γ, sont eux aussi des fonctions continues de la position de l'objet : il en résulte que pour un objet situé au voisinage du foyer objet, les aberrations varient comme le grandissement γ.

11. Défauts de l'image : déformation, limite de résolution.

L'image totale de l'objet obtenue dans le plan P' a une forme donnée approximativement par les points d'impact des rayons moyens des faisceaux : sa *déformation* par rapport à l'objet provient de la distorsion w_d.

La tache d'aberration non ponctuelle impose d'autre part une *limite de résolution* : ce phénomène est déterminé par les autres composantes d'aberration fonctions de v et $\bar{v}$.

Déformation. — Nous pouvons l'étudier en chaque point. Plaçons-nous au point objet A d'affixe u; si nous considérons le vecteur objet du, placé au voisinage, il lui correspond, compte tenu de la distorsion, un vecteur image

$$\gamma\, du + dw_d,$$

dw_d représentant la dérivée totale de la fonction w_d (53); autrement dit, le vecteur du est reproduit avec un grandissement qui est non pas γ, mais

$$\gamma + d\gamma = \frac{\gamma\, du + dw_d}{du} = \gamma + \frac{dw_d}{du}.$$

Cette valeur est en général complexe, ce qui traduit simplement le fait que l'objet et son image forment un certain angle. On peut écrire encore

$$(58) \qquad \gamma + d\gamma = \left(\gamma + \frac{\partial w_d}{\partial u}\right) + \frac{\partial w_d}{\partial \bar{u}}\, \frac{d\bar{u}}{du}.$$

Le premier terme en est isotrope, c'est-à-dire indépendant de la direction de du; au cas où il existe seul, les formes et par suite les angles sont conservés dans la reproduction du voisinage du point u.

Le deuxième terme est anisotrope : son module $\left|\frac{\partial w_d}{\partial \bar{u}}\right|$ est indépendant de la direction de du, mais son argument ne l'est pas; il traduit une déformation de l'image de l'objet au voisinage.

On voit ainsi que $\gamma + d\gamma$ varie entre les deux valeurs

$$\gamma_{max} = \gamma + \frac{\partial w_d}{\partial u} + \left|\frac{\partial w_d}{\partial \bar{u}}\right|,$$

$$\gamma_{min} = \gamma + \frac{\partial w_d}{\partial u} - \left|\frac{\partial w_d}{\partial \bar{u}}\right|.$$

obtenues ainsi qu'on peut le voir, aisément, pour deux directions du rectangulaires.

Passons aux conséquences pratiques : l'image dans son ensemble ne serait semblable à l'objet que si l'on avait

$$\gamma + d\gamma \text{ indépendant de } u,$$

c'est-à-dire en vertu de (53)

$$(58) \qquad w_d = \gamma(D_3 u + D').$$

En dehors de cette éventualité exceptionnelle, il est permis de considérer comme favorable celle où l'*image donne de l'objet une carte respectant localement les formes (conservation des angles)* (*cf.* cartes géographiques), ce qui aura lieu pour

$$(59) \qquad \frac{\partial w_d}{\partial \bar{u}} = 0.$$

Si cette relation a lieu en tout point, w_d est fonction analytique de la variable complexe u, résultat bien connu par ailleurs dans la théorie des fonctions

$$w_d = \gamma(D_2 u^2 + D_3 u + D').$$

Dans le cas général *la déformation*, c'est-à-dire *le défaut fondamental introduit par la distorsion* pourra se mesurer en chaque point u par le rapport

$$(60) \qquad \Delta = \frac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{\gamma} = \frac{2}{\gamma}\left|\frac{\partial w_d}{\partial u}\right|.$$

Un petit cercle tracé au voisinage de u a pour image une ellipse dont l'expression précédente représente l'ellipticité.

Limite de résolution. — Si nous passons maintenant aux aberrations définies par les rubriques 2, 3, 4, 5, l'une d'elles sera en pratique prépondérante pour chaque point A. Supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse de l'astigmatisme; A donne une tache circulaire dans le plan P', dont le rayon est en vertu de (55)

$$\gamma\,|A_1 u^2 + A_2 u + A|\,V.$$

La limite de résolution imposée par cet astigmatisme en est la quantité conjuguée dans l'espace objet

$$(61) \qquad \varpi = |A_1 u^2 + A_2 u + A|\,V.$$

On évaluerait de la même manière les limites dues à d'autres composantes (aberration sphérique : $\varpi = \sigma V^3$) sauf en ce qui concerne le coma : ce dernier exigerait le cas échéant des considérations différentes du fait qu'il ne fournit pas une tache circulaire.

On pourra remplacer V en fonction de l'*angle d'ouverture* α *du faisceau*

$$(62) \qquad \alpha = V s'_{01}(a)$$

et obtenir des expressions en α dont les coefficients définissent les constantes d'aberration correspondantes.

Considérons les grandeurs telles que les fonctions Φ_1, Φ_2, ..., les affixes u, V, l'ouverture α, comme étant des quantités de même ordre infinitésimal; on voit que l'ordre infinitésimal de ϖ est égal à celui de l'accolade qui lui donne naissance. Il en résulte que l'ellipticité donne une limite de réso-

lution du deuxième ordre, les autres termes $\{\Phi_0 s^3\}$, $\{\Phi_1 s^2\}$, ..., donnent des limites du troisième ordre au moins; on conçoit ainsi que l'*ellipticité des lentilles, c'est-à-dire leurs dissymétries d'ordre $m=2$, interviennent* a priori *en tout premier lieu pour limiter le pouvoir séparateur.*

Avant d'envisager cette question plus particulièrement on observera qu'une discussion complète de la limite de résolution devrait faire intervenir d'autres facteurs sortant du cadre de cette étude : diffraction... [4], [8]. Rien n'oblige d'autre part à observer l'image dans le plan P' : l'observation directe de la figure géométrique montre que si l'on reçoit l' « image » sur un plan parallèle à P' et voisin, l'aberration s'y trouve décrite par une expression de la forme $w + \gamma\, bv$, b constante); on observe donc les mêmes composantes (53) à (57) sauf en ce qui concerne le terme $\gamma C v$ de courbure du champ : ce dernier devient $\gamma\,(C+b)\,v$ et peut ainsi s'annuler par un choix convenable du plan de visée.

12. Calcul de la limite de résolution dans le cas de dissymétrie $m = 2$ (ellipticité).

Dans le cas de l'aberration d'ellipticité dont on a signalé l'importance, l'équation à résoudre est

$$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_2 s\} = 0$$

c'est-à-dire

$$\Phi_0 s'' + \frac{\Phi_0'}{2} s' + \frac{\Phi_0''}{4} s - \frac{1}{4}\Phi_2 \bar{s} = 0. \tag{63}$$

On pourrait l'obtenir facilement par un calcul direct. Elle équivaut à un système d'équations différentielles linéaires et réelles en x et y, et il en résulte des propriétés simples.

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse suivante, déjà envisagée dans l'étude d'une lentille électrostatique particulière : *le plan $\theta = 0$ est le plan de symétrie.*

Il s'agit là d'un cas classique [9], [10] de systèmes électroniques dont nous allons retrouver rapidement les résultats. On voit que $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi_2' = 0$; la fonction $\Phi_2(z)$ est par suite réelle en vertu de (6), de sorte que le système équivalent à (63) s'écrit

$$\begin{cases} \Phi_0 x'' + \dfrac{\Phi_0'}{2} x' + \dfrac{\Phi_0'' - \Phi_2}{4} x = 0, \\ \Phi_0 y'' + \dfrac{\Phi_0'}{2} y' + \dfrac{\Phi_0'' + \Phi_2}{4} y = 0. \end{cases} \tag{64}$$

Les fonctions $x(z)$, $y(z)$ sont déterminées de façon indépendante : *les trajectoires en projection suivant le plan yOz suivent les lois de l'optique de Gauss en faisant intervenir un premier système de points cardinaux; de même celles en projection suivant le plan xOz mettent en jeu un deuxième système de points cardinaux*, très voisin du premier si Φ_2 est occasionné seulement par un écart.

La figure 17 représente ainsi la marche des rayons issus d'un point objet A, les deux projections suivant yOz, xOz étant supposées rabattues sur le plan de la figure. On voit apparaître un astigmatisme : le faisceau présente deux focales en A'_1 et A'_2, respectivement parallèles à chacun des plans et de longueur indépendante de la position de A dans son plan de front. Il existe d'autre part une distorsion : dans le cas de la figure 17, l'image paraîtrait écrasée suivant la direction Oy.

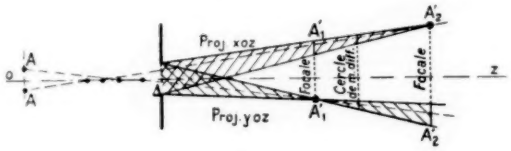


Fig. 17.

Le phénomène peut ainsi se décrire simplement en faisant appel à des constructions classiques d'optique géométrique.

Passons au cas général où n'existe pas de plan de symétrie [la fonction $\Phi_2(z)$ n'est plus réelle].

Nous tenons compte des autres écarts : Φ_1..., éventuels; la formule de l'aberration étant, d'après (49)

$$w = -\frac{1}{4}\gamma\Big[\bar{u}\,\mathcal{L}(\overline{\Phi}_2 s_{10}) + \bar{v}\,\mathcal{L}(\overline{\Phi}_2 s_{01}) + \big[\overline{v_0 - \zeta(d)}\big]\big[\mathcal{L}(\overline{\Phi}_2 s_{01}) + \mathcal{L}(\overline{\Phi}_2 \bar{s}_{01})\big]\Big].$$

Il en résulte toujours une *distorsion* (termes indépendants de v) *et un astigmatisme indépendants de la position de A* (terme en v). L'absence de courbure du champ indique que le cercle de moindre diffusion se trouve dans le plan P' conjugué de l'objet dans le système idéal Σ_0. Il est possible de voir que les propriétés simples de construction suivant deux projections s'appliquent toujours si les focales sont suffisamment lointaines.

Nous effectuerons le calcul de la *limite du pouvoir séparateur imposée par l'ellipticité*; c'est en vertu de (61)

$$\varpi = \left| -\frac{1}{4}\mathcal{L}\big[\overline{\Phi}_2(z)\, s_{01}(z)\big]\right| V \tag{65}$$

c'est-à-dire d'après (50) et en remplaçant V en fonction de α *angle d'ouverture du faisceau*

$$\varpi = \frac{1}{4\sqrt{\Phi_0(a)}}\left|\int_a^{a'} \frac{\overline{\Phi_2(t)}\,[S(t)]^2}{\sqrt{\Phi_0(t)}}\,dt\right| \alpha. \tag{66}$$

Appliquons au cas de la lentille déjà envisagée jouant le rôle d'*objectif de microscope, l'ellipticité affectant son électrode centrale.*

Les fonctions $\Phi_0(z)$ et $S(z)$ sont connues par l'étude préalable de la lentille idéale [3]; on a d'autre part, déterminé la fonction $\Phi_2(z)$ (relation 37).

Des considérations d'homogénéité montrent que l'on doit s'attendre à une relation du type

$$\varpi = K\,\delta_{max}\,\alpha,$$

où K est un nombre déterminé pour une famille de lentilles et de défauts homothétiques, ce qui permet d'effectuer le calcul en donnant aux deux paramètres électrique $\Phi_0(a)$ et géométrique R des valeurs arbitraires.

Le calcul donne dans ces conditions : $K \neq 5$. Si l'on remarque que la différence des deux axes de l'ellipse de gorge est $\Delta a = 4\,\delta_{max}$, on pourra encore écrire, les évaluations n'étant qu'approchées

$$\boxed{\varpi = \Delta a\,\alpha.} \tag{67}$$

Δa définit ce qu'on peut appeler la constante de l'aberration d'ellipticité.

Voyons à quelle condition l'on aura par exemple

$$\varpi = 1\ \text{m}\mu \qquad \text{pour} \quad \alpha = 10^{-3}.$$

C'est un ordre de grandeur au-dessous duquel on peut admettre que le défaut elliptique n'intervient pas pour limiter le pouvoir séparateur. Il correspond suivant (67) à $\Delta a = 1\ \mu$ ou $\delta_{max} = 0{,}25\ \mu$.

On voit que *la symétrie axiale de l'ouverture de la lentille doit être réalisée avec une précision considérable* si l'on veut que l'ellipticité ne limite pas son pouvoir séparateur.

L'étude expérimentale du microscope électrostatique justifie cette conclusion [11], dont on a indiqué plus haut la raison essentielle.

Remarques concernant le rôle des autres pièces. — Les résultats obtenus supposent que le *rôle des défauts de symétrie des pièces autres que l'électrode centrale de l'objectif soit négligeable,* si l'on veut qu'on puisse parler du pouvoir séparateur du microscope global; on justifie aisément ce point. En ce qui concerne, d'une part, les électrodes latérales de l'objectif, elles donnent un potentiel correctif φ, et par suite, une fonction $\Phi_2(z)$ réduits par le fait que E reste nul ou faible sur la plus grande partie de leur surface voisine de l'axe; de plus $\Phi_0(z)$ garde pratiquement sa valeur maximum dans la zone d'action correspondante ce qui diminue encore la contribution dans (66).

Quant à la lentille de projection, $[S(z)]^2$ présente dans sa zone, des valeurs bien plus faibles que dans celle de l'objectif, de sorte qu'on peut également ne pas tenir compte de ses défauts propres, à moins qu'ils ne soient sensiblement plus prononcés que ceux de l'objectif.

13. Cas général où existent champ électrique et magnétique (exemple : microscope magnétique).

ÉQUATION DES TRAJECTOIRES. — S'il existe un champ magnétique de potentiel scalaire $\psi(r\,z\,\theta)$, il nous faut développer l'équation générale (41) dans sa totalité, c'est-à-dire ajouter le développement de son dernier terme

$$i\eta_1\sqrt{z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}s' - 2\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$$

à l'expression figurant dans (42).

Il apparaît ainsi, par rapport à (42), les termes nouveaux

$$(68)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0 s\right\} & \left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0 s^3\right\} & \text{mettant en jeu l'ordre de symétrie} \ldots\ldots \quad m=0 \\
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\right\} & \left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1 s^2\right\} & \\
\left\{\dfrac{\Psi_0\Phi_1}{\sqrt{\Phi_0}}s^2\right\} & \left\{\dfrac{\Phi_1\Psi_1}{\sqrt{\Phi_0}}s\right\} & \quad\text{»} \quad m=1 \\
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_2 s\right\} & & \quad\text{»} \quad m=2 \\
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_2 s^2\right\} & & \quad\text{»} \quad m=3
\end{array}\right.$$

On donne aux accolades la même signification que dans le cas du champ purement électrique. Si l'on suppose d'autre part que le système ne s'éloigne de la symétrie de révolution que par des écarts : (Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, ..., petits) la liste précédente donne les termes principaux, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas compte, pour une raison déjà mentionnée, des termes qui seraient constamment « masqués » par les autres.

Nous n'écrirons que les valeurs des accolades les plus importantes :

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\right\} = -i\eta_1\sqrt{\Phi_0}\,\overline{\Psi}_1, \\
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0 s\right\} = \quad i\eta_1\sqrt{\Phi_0}\left(\Psi_0^1 s' + \dfrac{1}{2}\Psi_0^2 s\right), \\
\left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_2 s\right\} = -\dfrac{i\eta_1}{2}\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_2^2 s.
\end{array}\right.$$

L'équation des trajectoires est alors

$$(70)\quad \left\{\Phi_0 s\right\} + \left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0 s\right\} + \left\{\Phi_1\right\} + \left\{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\right\} + \mathfrak{A} = 0.$$

$\mathfrak{A}$ désigne maintenant l'ensemble des termes restants des tableaux (43) *et* (68).

Pour la simplicité nous utiliserons le procédé connu consistant à rapporter les affixes s dans les divers plans, non pas à une origine de direction fixe, mais à *une origine de direction définie par un angle*

$$(71) \qquad \omega(z) = \int_a^z \frac{\tau_1}{2} \frac{\Psi''_0}{\sqrt{\Phi_0}} \, dz.$$

Il suffit pour cela de remplacer partout la notation s par $se^{-i\omega}$. On trouve que (70) s'écrit avec cette nouvelle convention

$$(72) \qquad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4}\left[\Phi''_0 + \tau_1^2 (\Psi''_0)^2\right] s - \left(\frac{\overline{\Phi}_1}{2} + i\tau_1 \sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\right) e^{i\omega} + \mathfrak{B} = 0,$$

en posant $\mathfrak{B}(s) = \mathfrak{A}(se^{-i\omega})\, e^{i\omega}$.

Aberrations. — Cette équation générale des trajectoires se traite comme l'équation (42) du cas purement électrique et il suffira de passer en revue rapidement les divers aspects de la résolution.

*Dans les champs de symétrie axiale et pour l'*A G, on a l'équation homogène à coefficients réels

$$(73) \qquad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4}\left[\Phi''_0 + \tau_1^2 (\Psi''_0)^2\right] s = 0,$$

traduisant les propriétés connues de focalisation.

Les champs affectés d'une dissymétrie d'ordre $m = 1$ sont régis *dans le cas de l'*A G par

$$(74) \qquad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4}\left[\Phi''_0 + \tau_1^2 (\Psi''_0)^2\right] s - \left(\frac{\overline{\Phi}_1}{2} + i\tau_1 \sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\right) e^{i\omega} = 0,$$

équation qui n'est plus homogène, mais conserve encore les propriétés de focalisation; si nous désignons par $s = \zeta(z)$ la trajectoire confondue avec Oz dans le milieu objet, la dissymétrie $m = 1$ ne fait qu'imprimer aux images le décalage transversal $\zeta(z)$ (*fig.* 14).

Dans le cas général, où les approximations précédentes ne suffisent pas, on voit apparaître des aberrations du fait que l'équation (72) n'est plus analytique en s.

Gardons les mêmes notations que dans le cas purement électrique; on devra seulement ne pas oublier que maintenant *les trajectoires et également les affixes* v_0, u, v, w *sont rapportées à des directions origines variables d'un plan complexe à un autre suivant la loi* (71).

Dans ces conditions l'*aberration propre au rayon* (u, v) est

$$(75) \qquad A'_0 A' = w = \gamma \mathcal{L}\mathfrak{B}\left[u s_{10} + \left(v + v_0 - \zeta(d)\right) s_{01} + \zeta\right],$$

l'opérateur $\mathcal{L}$ étant toujours défini par (50).

Il en résulte des conséquences du même ordre que celles de la première étude : *si l'espace image est dénué de champ*, il apparaît des composantes : *distorsion, courbure de champ, astigmatisme, aberration sphérique*, définies respectivement par les formules des types (53) à (57). Remarquons toutefois que les constantes D_1, A_1 et K_1 sont, d'après leurs expressions sous formes d'intégrales, toujours réelles pour un champ électrostatique pur, alors qu'elles sont complexes dans le cas général envisagé actuellement; cette propriété donne naissance aux particularités classiques connues sous les noms de *distorsion, astigmatisme et comaanisotropes*.

Ici encore l'*aberration due à une dissymétrie d'ordre* $m = 2$ (*ellipticité*) *de pièces magnétiques* présente une importance particulière. L'équation s'écrit

$$(76) \qquad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4}\left(\Phi''_0 + \tau_1^2 (\Psi''_0)^2\right) s - \frac{i\tau_1}{2} \sqrt{\Phi_0}\,\Psi'_2\, e^{-2i\omega} \bar{s} = 0.$$

Elle met en évidence une distorsion et un astigmatisme; ce dernier est proportionnel à l'ouverture α et de même que dans le cas purement électrique, on peut s'attendre à ce que l'ellipticité limite le pouvoir séparateur si la symétrie axiale n'est pas réalisée avec une grande précision. Hillier l'a constaté expérimentalement dans le microscope magnétique [12].

Cas ou le champs magnétique est du a une influence parasite extérieure. — Au lieu de considérer un microcospe magnétique, nous supposons avoir maintenant affaire à un *microscope électrostatique perturbé par des champs magnétiques extérieurs* : champ terrestre, champs créés par des sources d'alimentation ou des moteurs placés au voisinage (blindage insuffisant). Nous admettrons pour simplifier que le champ résultant est pratiquement uniforme ou du moins présente une variation assez faible pour qu'on puisse négliger ses dérivées par rapport aux coordonnées. On voit aisément, en ne reportant aux expressions générales des composantes du champ

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad -2\frac{\partial \psi}{\partial s},$$

que les seules grandeurs magnétiques dont nous ayons à tenir compte dans les expressions des accolades sont : Ψ_0, Ψ''_0, Ψ'_1.

Dans le cas actuel il est inutile de considérer un repérage des affixes variable en fonction des plans de front; nous prenons à nouveau une même direction origine, pour tous ces plans. L'équation des trajectoires est (70) et les termes introduits par le champ magnétique se réduisent à

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} \{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0 s\} &= i\eta_1\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_0'' s', \\ \{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1\} &= -i\eta_1\sqrt{\Phi_0}\,\overline{\Psi}_1, \\ \left\{\frac{\Phi_1}{\sqrt{\Phi_0}}\Psi_1 s\right\} &= -\frac{i\eta_1\overline{\Psi}_1}{4\sqrt{\Phi_0}}(\Phi_1 s + \overline{\Phi}_1\bar{s}) \\ \{\sqrt{\Phi_0}\,\Psi_1 s^2\} &= \frac{i\eta_1}{8\sqrt{\Phi_0}}\overline{\Psi}_1\Phi_0'' s\bar{s} \end{aligned}\right\}\mathfrak{A}.$$

On observera que *le champ parasite s'étendant également à l'espace image*, on n'a plus nécessairement la relation (51) qui, on l'a vu, particularise la forme de certaines aberrations. Effectivement, l'*aspect des termes de* $\mathfrak{A}$ *montre que le polynome* w comprend :

des termes indépendants de v : distorsion;

des termes en v et en $\bar{v}$: courbure du champ et astigmatisme;

un terme en $v\bar{v}$ non accompagné de terme en v^2 et qui, par suite ne rentre pas dans les rubriques obtenues jusqu'à présent.

On verra aisément que si cette dernière aberration est supposée exister seule, le faisceau émergent s'appuie sur une focale unique située dans le plan P'.

Les aberrations a l'approximation relativiste. — Si la tension d'accélération atteint des valeurs suffisantes (une centaine de kV), l'étude doit en toute rigueur s'effectuer conformément à la mécanique relativiste. Les trajectoires sont encore données par un principe de moindre action à partir d'une intégrale

$$\int_I^F \mu\, d\sigma,$$

et l'on a maintenant [13]

$$\mu = (\varphi + \eta_1^2\varphi^2)^{\frac{1}{2}} - \eta_1 \vec{A}\frac{d\vec{\sigma}}{d\sigma}.$$

Il en résulte que les calculs se déroulent de la même manière que précédemment, à condition de remplacer φ par $\varphi + \eta_1^2\varphi^2$, ce qui conduit aux substitutions

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_0 &\to \Phi_0(1+\eta_1^2\Phi_0), \\ \Phi_1 &\to \Phi_1(1+2\eta_1^2\Phi_0), \\ \Phi_2 &\to \Phi_2(1+2\eta_1^2\Phi_0) + 2\eta_1^2(\Phi_1)^2, \\ \Phi_0^2 &\to \Phi_0^2(1+2\eta_1^2\Phi_0) - 2\eta_1^2\Phi_1\overline{\Phi}_1. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients des développements de $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{s}}$ que fait intervenir l'équation (41) ne sont pas différents des précédents; ceux de $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sont à substituer suivant

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_0' &\to \Phi_0'(1+2\eta_1^2\Phi_0), \\ \Phi_1' &\to \Phi_1'(1+2\eta_1^2\Phi_0) + 2\eta_1^2\Phi_0'\Phi_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

L'étude des aberrations n'offrira pas de changement, à ces transformations près; (66) et (78) montrent par exemple que la composante d'ordre 2, Φ_2, est toujours responsable d'un astigmatisme d'ellipticité, d'expression (en négligeant $(\Phi_1)^2$)

$$(80)\quad \varpi = \frac{1}{4\sqrt{\Phi_0(a)[1+\eta_1^2\Phi_0(a)]}} \times \left|\int_a^{a'} \frac{\Phi_2(1+2\eta_1^2\Phi_0)}{\sqrt{\Phi_0(1+\eta_1^2\Phi_0)}} S^2\, dt\right| z.$$

Supposons la quantité $\eta_1^2\Phi_0$ très faible; on voit facilement que l'écart relatif entre les résultats des formules (66) et (80) atteint au plus la valeur $\eta_1^2\Phi_0(a)$, c'est-à-dire $1/10^6$ ($\eta_1^2 \# 10^{-6}$: équation (40)) pour une tension d'accélération de 100 kV.

De façon générale l'approximation relativiste ne modifie pas la physionomie des résultats mis en évidence au cours de l'étude.

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. Bertein, *C. R. Acad. Sc.*, 220, 1945, p. 684-686.
2. Magnus et Oberhettinger, *Formeln und Sätze*, Berlin, 1943, p. 53.
3. H. Bruck, *Cahiers de Physique*, 24, 1944, p. 15.
4. Zworykin et Ramberg, *The electron Microscope* (références).
5. K. Schwarzschild, *Gesell. Wiss. Gœttingen* (*Nach. Math. Phys. Klasse*, 3, 1903, p. 126-131).
6. E. Goursat, *Analyse mathématique*, 3e édition, §§ 400, 401 et 606.
7. Busch et Bruche, *Beiträge zur Elektronenoptik*, Leipzig, 1937.
8. P. Grivet et H. Bruck, *L'Onde électrique*, 231, 1946, p. 175-227.
9. M. Cotte, *Recherches sur l'Optique électronique* (*Thèse*), 1938.
10. W. Glaser, *Zeits. Phys.*, 120, 1943, p. 1-15.
11. F. Bertein et E. Regenstreif, *C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 737-739.
12. J. Hillier, *J. of Appl. Phys.*, 17, 1946, p. 307-309.
13. W. Glaser, *Zeits. Phys.*, 80, 1933, p. 451-464.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES PROCÉDÉS ET APPAREILS DE MESURE DANS LE DOMAINE DES ONDES CENTIMÉTRIQUES

PAR M. DENIS ET R. LIOT,

Laboratoire de Recherches « Tubes Électroniques » de la Compagnie générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *L'étude et la mise au point des générateurs pour ondes centimétriques nécessitent la recherche et l'expérimentation de certaines méthodes de mesure dont les plus importantes ont trait à la détermination expérimentale :*

a. du coefficient de surtension et de l'impédance-shunt des cavités associées aux tubes électroniques;
b. de la valeur absolue des fréquences et de leurs écarts relatifs;
c. de la puissance maximum fournie à une charge donnée;
d. de la largeur de bande des générateurs modulés en fréquence.

Les problèmes, théoriques et pratiques, posés par la mise en œuvre des principes, seront examinés dans une série de rapports. Le premier, publié dans le présent exposé, après un rappel des caractères distinctifs de la technique des mesures dans le domaine des hyperfréquences, traite des propriétés des lignes de transmission et du détecteur d'ondes stationnaires, avec application à la détermination des impédances et des surtensions.

1. Introduction.

La technique des mesures dans le domaine des ondes ultra-courtes a commencé à se développer vers 1937. Durant la dernière guerre, les nécessités militaires et en particulier l'emploi généralisé des équipements de radar ont poussé les belligérants à activer les recherches dans ce sens; toutefois il n'en est pas résulté un corps de doctrine précis et il n'existe pas encore dans ce domaine d'ouvrages didactiques ou d'exposés systématiques comparables à ceux qui existent depuis longtemps déjà pour les mesures en ondes plus longues.

Dans le présent exposé, il sera question uniquement des méthodes et appareils de mesures étudiés à propos de la mise au point des tubes électroniques pour ondes centimétriques.

D'autre part, nous ne ferons que rappeler sommairement les méthodes employées par d'autres auteurs, en nous attachant spécialement aux procédés mis en œuvre au cours de nos propres recherches et en développant particulièrement la critique des méthodes. Enfin, dans certains cas où la technique n'est pas suffisamment développée, nous indiquerons les solutions possibles actuellement en cours d'étude.

2. Quelques principes relatifs aux mesures dans le domaine des ondes centimétriques.

2.0. La comparaison des principes qui sont à la base des méthodes de mesure en basse fréquence d'une part et en ondes centimétriques d'autre part, montre que ces dernières offrent à l'expérimentateur des commodités liées au fait que le comportement électrique d'un réseau quelconque dépend essentiellement de sa structure géométrique, en général suffisamment simple pour que l'on puisse prédéterminer, à l'aide des équations de Maxwell, les caractéristiques d'un élément d'appareil de mesure; la géométrie des systèmes joue un rôle très important en ondes centimétriques, alors qu'en ondes longues la complexité des éléments employés (bobinages, condensateurs) conduit à ne considérer que le point

de vue énergétique des phénomènes. Un exemple pourra illustrer ce que nous venons de dire : on emploie couramment dans la technique des hyperfréquences des atténuateurs faisant appel aux propriétés des guides au-dessous de la fréquence de coupure : les atténuations de tels guides dépendent uniquement de leurs dimensions géométriques; c'est pourquoi on a pu les utiliser après changement de fréquence pour étalonner par comparaison des atténuateurs à résistance destinés à des signaux de quelques mégacycles.

2.0.1. Cet avantage mis à part, il semble bien que les mesures dans le domaine que nous explorons ne présentent que des inconvénients par rapport aux mesures classiques. Il faut d'abord insister sur le fait que par suite de l'importance primordiale des phénomènes de rayonnement, les quantités électriques intéressantes à déterminer ne sont pas les mêmes en ondes ultra-courtes qu'en ondes plus longues; dans le domaine que nous étudions la mesure d'un champ est plus intéressante que celle d'une différence de potentiel et d'ailleurs, sauf dans des cas très rares, cette dernière grandeur ne peut pas être définie puisque le champ électrique ne dérive plus d'un potentiel scalaire. C'est pour cette raison par exemple que pour spécifier les performances d'un générateur d'ondes centimétriques, on préfère mesurer la puissance dissipée dans une charge quelconque associée à la source à l'aide d'un système convenable d'adaptation plutôt que déterminer la tension développée aux bornes d'une impédance, comme on le fait sur les générateurs d'ondes longues.

Des grandeurs dont la mesure est très féconde dans l'électrotechnique classique comme la self-inductance ou la capacité perdent toute signification en ondes centimétriques; toutefois dans le but de faciliter les raisonnements et par raison de commodité, on définit souvent des « self-inductances » ou « capacités équivalentes », mais de telles notions sont parfois dangereuses si l'on ne précise pas exactement leur domaine de validité. On peut dire que le domaine des micro-ondes est caractérisé par l'emploi de circuits à constantes réparties par opposition au domaine courant où les constantes sont localisées. Il en résulte une des principales difficultés des mesures en ondes centimétriques : il n'existe pas comme en ondes plus longues — du moins pour certaines grandeurs — d'étalons de référence. Dans le domaine des fréquences acoustiques par exemple, toute mesure d'impédance se ramène à une comparaison de l'élément étudié à une self-inductance, une capacité ou une résistance étalons; il n'existe pas en ondes centimétriques d'équivalent des mesures en pont, l'impédance d'un élément n'ayant de signification que si l'on précise les caractéristiques des circuits qui l'accompagnent.

Une autre difficulté, trouvant son origine dans la même propriété des systèmes à ondes très courtes, réside dans le fait que les éléments parasites (pertes dans les conducteurs, contacts défectueux) jouent un rôle qui diffère selon l'endroit où ils interviennent : leur influence est donc plus difficile à déterminer (on peut pallier dans certains cas cette difficulté par des procédés que nous examinerons au cours de cet article).

Enfin, la plupart des organes de mesure, si leurs dimensions ne sont pas très petites par rapport à la longueur d'onde, peuvent fournir des renseignements très erronés. Nous verrons par exemple à l'occasion des mesures de puissance que les étalonnages effectués en basse fréquence sur des bolomètres ou thermocouples ne demeurent pas valables en ondes centimétriques.

2.1. Si nous cherchons maintenant à résumer ce qui différencie les mesures en ondes centimétriques de la technique classique en ondes longues, nous pouvons dire que certains étalons, comme l'ampère ou le volt internationaux, créés pour les besoins de l'électrotechnique courante ne jouent pratiquement aucun rôle dans les mesures en ondes ultra-courtes.

Dans le domaine qui nous intéresse, les mesures relatives se font très souvent par rapport à des étalons secondaires parfaitement déterminés dès que l'on connaît leurs dimensions géométriques; on peut dire dans certains cas que la précision dans la mesure d'une grandeur électrique est égale à la précision que l'on sait obtenir dans la détermination des longueurs qui caractérisent l'étalon de référence (mesure des longueurs d'onde et des impédances caractéristiques). De même la mesure précise des fréquences est toujours obtenue par multiplication à partir d'un quartz dont la période d'oscillation est comparée aux indications d'une horloge astronomique.

La plupart des mesures énergétiques absolues seront effectuées en cherchant à caractériser une manifestation simple et élémentaire des phénomènes mis en jeu. C'est ainsi que la mesure des puissances par des procédés calorimétriques joue un rôle important dans la technique actuellement étudiée. D'ailleurs, d'une manière générale, les mesures énergétiques directes ou masquées sont fréquemment employées comme dans le domaine des ondes beaucoup plus courtes (infrarouge).

2.1.1. Enfin, les mesures en ondes centimétriques sont caractérisées par l'emploi d'organes de mesures spéciaux :

a. Les sources (klystron reflex, lampes à grille positive, triodes) sont évidemment très différentes des sources classiques;

b. Les cristaux détecteurs ou mélangeurs remplaçant les diodes ou triodes;

c. La ligne de transmission ou le guide d'onde associés à un détecteur d'ondes stationnaires jouent un rôle capital comparable à celui du pont de Maxwell (ou de ses dérivés) en ondes longues.

Pour les longueurs d'ondes d'espace comprises entre 5 et 15 cm environ, on emploiera indifféremment les guides d'ondes ou les coaxiaux; dans certains problèmes toutefois, où les dimensions des guides peuvent devenir prohibitives, on se limitera à l'emploi des coaxiaux; dans d'autres où l'atténuation trop considérable des coaxiaux peut devenir gênante, ou bien encore lorsque l'apparition de mode de propagation d'ordre plus élevé devient possible, on fera appel aux guides. Dans ce domaine de longueurs d'ondes, il est nécessaire de développer les équipements expérimentaux en vue de les associer selon les besoins à des guides d'ondes ou à des coaxiaux.

Au-dessous de 5 cm, le guide d'onde s'impose; on emploie de préférence le guide à section rectangulaire parcouru par une onde du type H_{01} ou encore le guide à section circulaire excité par une onde H_{11}.

Il faut remarquer que l'impédance caractéristique d'un guide — qui constitue une grandeur de référence — peut être définie de plusieurs manières, donnant chacune une valeur numérique différente. Cette difficulté est purement formelle et peut être évitée en précisant chaque fois la définition de l'impédance caractéristique conforme à l'aspect physique du phénomène que l'on veut étudier.

3. La mesure du taux d'ondes stationnaires. Application à la mesure des impédances.

3.0. *La théorie.* — Une des quantités que l'on utilise le plus fréquemment en ondes centimétriques est le coefficient de réflexion K, quantité définie à la fois en phase et en amplitude : on le calcule en mesurant le taux d'ondes stationnaires dans un système de transmission et en déterminant la position des nœuds de champ électrique par rapport à une origine de référence arbitrairement choisie.

Connaissant ce coefficient de réflexion, on pourra par exemple déterminer la valeur de l'impédance terminale qui provoque l'apparition d'ondes stationnaires. *Il est à remarquer que l'impédance ainsi mesurée est une impédance « réduite » ou « normalisée », l'impédance de référence étant en l'occurence l'impédance caractéristique du système de transmission.*

Dans ces mesures, on utilise en général des organes de transmission dont les pertes par unité de longueur sont très petites. Quand une onde caractérisée par une distribution des champs électriques et magnétiques rencontre une discontinuité (antenne désadaptée ou cristal détecteur pour fixer les idées), la distribution résultante des champs le long de la ligne de transmission peut être considérée comme la somme de l'onde progressive initiale et de l'onde réfléchie qui se déplace en sens inverse. L'amplitude et la phase des champs caractérisant cette onde réfléchie sont déterminées par l'impédance normalisée de l'obstacle.

Si l'on examine les équations bien connues de propagation d'une onde dans une ligne homogène, la notion de coefficient de réflexion peut être aisément précisée.

Ces équations s'écrivent

$$E = E_A e^{-j\beta x} + E_B e^{j\beta x}, \tag{3.1}$$

$$I = \frac{1}{Z_c}\left[E_A e^{-j\beta x} - E_B e^{j\beta x}\right], \tag{3.2}$$

les symboles ayant les significations suivantes :

E, tension totale (ou intégrale de champ électrique);
I, courant total;
E_A, tension de l'onde incidente;
E_B, tension de l'onde réfléchie;
$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, constante de phase de la ligne;
x, distance au point de référence;
Z_c, impédance caractéristique que nous supposerons réelle.

Si nous prenons comme origine le point d'insertion de l'impédance à mesurer Z, on peut déterminer le rapport $\frac{E_B}{E_A}$ par la relation (3.3) tirée des équations 3.1 et 3.2

$$Z = Z_c \frac{E_A + E_B}{E_A - E_B}, \tag{3.3}$$

d'où

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{\frac{Z}{Z_c} - 1}{\frac{Z}{Z_c} + 1} = K \textit{ coefficient de réflexion.} \tag{3.4}$$

Si nous représentons par $z_0 e^{j\varphi}$ la valeur en amplitude et phase de l'impédance normalisée $\frac{Z}{Z_c}$, on voit que

$$(3.5) \qquad K = \frac{z_0 e^{j\varphi} - 1}{z_0 e^{j\varphi} + 1} = K_0 e^{j\psi}.$$

L'équation (3.1) peut s'écrire

$$(3.6) \qquad \frac{E}{E_A + E_B} = \frac{E_A}{E_B + E_A} e^{j\beta x} + \frac{E_B}{E_B + E_A} e^{-j\beta x}$$

et après des transformations très simples

$$(3.7) \qquad \frac{E}{E_A + E_B} = \frac{z-1}{2z}\left[e^{j\beta x} + K e^{-j\beta x}\right],$$

$$(3.8) \qquad \frac{E}{E_A + E_B} = \frac{e^{j\beta x}}{1 + K_0 e^{j\psi}}\left(1 + K_0 e^{j(\psi - 2\beta x)}\right)$$

On voit que E sera maximum en module quand

$$(3.9) \qquad \psi - 2\beta x = 2k\pi \qquad \text{ou} \quad \beta x_M = \frac{\psi}{2} - k\pi$$

et minimum quand

$$(3.10) \qquad \psi - 2\beta x = (2k+1)\pi \quad \text{ou} \quad \beta x_m = \frac{\psi}{2} - (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Le rapport $\frac{E_{max}}{E_{min}}$ s'écrit

$$(3.11) \qquad \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1 + K_0}{1 - K_0},$$

d'où

$$(3.12) \qquad K_0 = \frac{\frac{E_{max}}{E_{min}} - 1}{\frac{E_{max}}{E_{min}} + 1} = \frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$

$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \rho$ mesure *le taux d'ondes stationnaires* dans la ligne de transmission. C'est la grandeur que l'on détermine à l'aide du détecteur d'ondes stationnaires que nous décrirons plus loin.

ψ est déterminé par l'équation (3.10)

$$(3.13) \qquad \psi = 2\beta x_m + (2k+1).$$

Dès que l'on connaît $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, les relations (3.12) et (3.13) déterminent complètement $K = K_0 e^{j\varphi}$ et par conséquent l'impédance normalisée z puisque

$$(3.14) \qquad z_0 e^{j\varphi} = z = \frac{1 + K}{1 - K} = \frac{1 + K_0 e^{j\psi}}{1 - K_0 e^{j\psi}}.$$

On en tire

$$(3.15) \qquad z_0 = \frac{\sqrt{(1 - K_0^2)^2 + 4K_0^2 \sin^2\psi}}{1 + K_0^2 - 2K_0 \cos\psi},$$

$$(3.16) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2K_0}{1 - K_0^2}\sin\psi$$

K_0 et ψ peuvent être remplacés par leurs valeurs tirées de (3.12) et (3.13); l'indétermination sur ψ peut être levée expérimentalement de la manière suivante : si en écartant la sonde de l'obstacle à mesurer on trouve successivement un minimum et un maximum de champ électrique, on prend

$$\psi = 2\beta x_m - \pi.$$

Dans le cas contraire

$$\psi = 2\beta x_m.$$

Dans le premier cas, z_0 est inférieur à 1, dans le second il lui est supérieur.

En fonction de ρ et x_m, on peut écrire si l'on exprime z en notation complexe : $z = z_0 e^{j\varphi}$

$$(3.17) \qquad z_0 = \sqrt{\frac{\rho^2 \operatorname{tg}^2\beta x_m + 1}{\rho^2 + \operatorname{tg}^2\beta x_m}},$$

$$(3.18) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\rho^2 - 1}{\rho}\,\frac{\operatorname{tg}\beta x_m}{1 + \operatorname{tg}^2\beta x_m},$$

$$(3.19) \qquad z = \frac{1 - j\rho\operatorname{tg}\beta x_m}{\rho - j\operatorname{tg}\beta x_m}$$

ou encore en posant

$$z = r + jy,$$

$$(3.20) \qquad r = \frac{\rho[1 + \operatorname{tg}^2\beta x_m]}{\rho^2 + \operatorname{tg}^2\beta x_m},$$

$$(3.21) \qquad y = \frac{(1 - \rho^2)\operatorname{tg}\beta x_m}{\rho^2 + \operatorname{tg}^2\beta x_m}.$$

Faisons en passant une remarque qui peut être utile dans certains cas.

L'impédance normalisée en un point de la ligne, considérée en regardant la sortie, s'écrit

$$\frac{Z_x}{Z_c} = \frac{E}{Z_c I} = \frac{e^{2j\beta x} + \frac{E_B}{E_A}}{e^{2j\beta x} - \frac{E_B}{E_A}} = \frac{e^{2j\beta x} + K_0 e^{j\psi}}{e^{2j\beta x} - K_0 e^{j\psi}}$$

soit

$$\frac{Z_x}{Z_c} = \frac{1 + K_0 e^{j(\psi - 2\beta x)}}{1 - K_0 e^{j(\psi - 2\beta x)}}.$$

En un nœud de champ électrique

$$(3.20) \qquad \frac{Z_{xm}}{Z_c} = \frac{1 - K_0}{1 + K_0} = \frac{1}{\rho}$$

en un ventre de champ élcetrique

$$(3.21) \qquad \frac{Z_{xM}}{Z_c} = \frac{1 + K_0}{1 - K_0} = \rho$$

et l'on a

$$(3.22) \qquad Z_{xm} Z_{xM} = 1.$$

Une autre remarque s'impose ici; elle est relative à la définition du point d'insertion de l'impédance Z,

que nous avons pris comme origine; en fait, étant donné les perturbations apportées par un obstacle dans la répartition des champs, ce point d'insertion est difficile à localiser et il est préférable de reporter l'origine en un point A où le champ électromagnétique a pu se réorganiser.

Que se passe-t-il quand on mesure l'impédance en ce point A, situé à une distance l de la terminaison et pris comme origine nouvelle ?

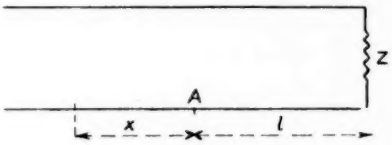


Fig. 3.1.

L'impédance en A s'écrit sans peine en utilisant les équations (3.1) et (3.2)

$$z_l = \frac{Z_l}{Z_c} = \frac{1 + jz \operatorname{cotg} \beta l}{z + j \operatorname{cotg} \beta l}.$$

Le coefficient de réflexion lié à cette impédance Z_l s'exprime par

$$K_l = (K_0)_l e^{j\psi_l} = \frac{z_l - 1}{z_l + 1} = \frac{z - 1}{z + 1} \frac{j \operatorname{cotg} \beta l - 1}{j \operatorname{cotg} \beta l + 1},$$

soit

$$K_l = K_0 e^{j\psi} e^{2j\beta l}. \tag{3.23}$$

Par conséquent

$$(K_0)_l = K_0 \quad \text{et} \quad \psi_l = \psi + 2\beta l,$$

le taux d'onde stationnaire comme le coefficient K_0 n'est pas modifié par la transformation consistant en l'addition d'un élément de ligne de longueur quelconque.

3.1. *L'emploi des diagrammes.* — En se rappelant que $z = \frac{1+K}{1-K}$, on voit en employant la relation (3.32) que l'on peut calculer l'impédance en un point quelconque de la ligne à partir du coefficient de réflexion déterminé en un point arbitraire de référence. Les calculs peuvent être considérablement écourtés par l'emploi systématique de divers diagrammes d'impédance obtenus en considérant que la relation $z = \frac{1+K}{1-K}$ est une transformation conforme.

3.2. *Diagramme de Smith ou diagramme z (fig. 3-8).* — Le plus connu est celui qui fait passer d'une représentation polaire des K à une représentation cartésienne des Z (diagramme de Smith).

Si l'on situe un coefficient K sur un diagramme polaire portant les cercles d'égal K_0 ($0 \leq K_0 \leq 1$) et les rayons d'égal ψ [$-\pi < \psi < \pi$], il est facile de repérer sans ambiguïté l'impédance z correspondante sur un diagramme cartésien. Un cercle K_0 se transforme en un cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + 2\frac{K_0^2 + 1}{K_0^2 - 1} x + 1 = 0$$

(avec $z = x + jy$).

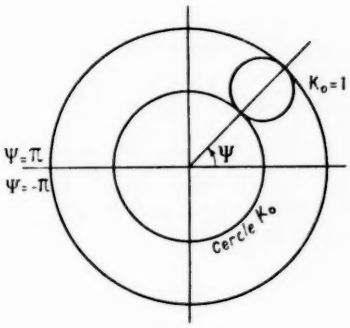


Fig. 3.2.

Ce cercle est symétrique par rapport à l'axe des impédances réelles qu'il coupe aux points

$$x_0 = \frac{K_0 + 1}{1 - K_0} = \rho \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{1 - K_0}{K_0 + 1} = \frac{1}{\rho}.$$

Un rayon ψ se transforme en un cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2y \operatorname{cotg} \psi - 1 = 0.$$

Ce cercle passe par le point (1.0) et coupe l'axe des y, aux points $-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$.

Soit encore en se référant à la relation (3.13) aux points

$$\pm \operatorname{cotg} \beta x_m \quad \text{et} \quad \pm \operatorname{tg} \beta x_m.$$

On constate que les réseaux des cercles (*voir* diagramme) transformés K_0 et ψ sont orthogonaux, les points limites étant les points (1,0) et (— 1,0); on n'utilise d'ailleurs que la moitié droite du plan.

3.1.2. *Diagramme de Rieke ou diagramme K.* — Si l'on définit une impédance $z = r_0 + jy_0$ dans la représentation cartésienne par l'intersection de deux droites

$$x = r_0 \quad \text{et} \quad y = y_0,$$

la transformation $K = \frac{z-1}{z+1}$ fera correspondre à ces droites des familles de cercles orthogonaux.

$x = r_0$ se transforme en un cercle d'équation

$$Y^2 + Z^2 - \frac{2r_0}{r_0+1} Y + \frac{r_0-1}{r_0+1} = 0, \qquad [K = X + jY]$$

dont le centre se trouve sur l'axe horizontal et qui passe par le point

$$Y = 0, \qquad X = 1.$$

En particulier,

le cercle ($r_0 = \infty$) se réduit au point précédent,
le cercle ($r_0 = 0$) se confond avec le cercle $K_0 = 1$,
et le cercle ($r_0 = 1$) passe par l'origine,

$y = y_0$ se transforme en un cercle d'équation

$$(X-1)^2 + Y^2 - \frac{2}{y_0} Y = 0$$

centré sur la droite verticale $X = 1$ et tangent à l'axe horizontal au point

$$Y = 0, \qquad X = 1;$$

le cercle $Y_0 = \infty$ se réduit au point précédent,
le cercle $Y_0 = 0$ est dégénéré en axe horizontal.

Remarquons que tous ces cercles doivent être limités aux arcs compris à l'intérieur du cercle $X^2 + Y^2 = 1$.

3.13. Pratiquement, dans beaucoup de problèmes, on emploiera indifféremment le diagramme K ou le diagramme Z. *Le diagramme K présente néanmoins l'avantage de n'avoir aucun point à l'infini.* De plus, dans chaque diagramme les cotes K_0 et ψ peuvent être remplacées *par les cotes équivalentes* ρ et βx_m *données directement par l'expérience.*

Étant données les propriétés des transformations conformes un cercle du diagramme K se transforme en un cercle du diagramme z, et inversement :

Tout cercle Z est tangent à deux cercles ρ_1 et ρ_2 du diagramme cartésien et se transforme en un cercle K tangent aux cercles concentriques de mêmes côtes ρ_1 et ρ_2 du diagramme polaire.

Si l'on modifie sur la ligne de mesure l'origine arbitraire d'un angle βl, le cercle Z se transforme en un cercle z_0, obtenu en déplaçant chaque point de z, sur le cercle ρ, d'un angle égal à βl, cette transformation est assez incommode, c'est pourquoi il est encore préférable de faire appel au diagramme K où la transformation se réduit à une rotation égale à βl du cercle représentatif initial.

3.14. Examinons encore un problème dont la solution nous sera utile ultérieurement. Peut-on choisir convenablement βl de telle façon qu'un cercle z se transforme en une droite verticale dans le diagramme de Smith ?

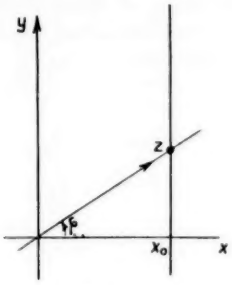


Fig. 3.3.

Si x_0 représente l'abscisse de cette droite, l'équation s'en écrit

$$z = \frac{x_0}{\cos\psi} e^{j\psi}.$$

Le cercle K correspondant, s'il existe, sera défini par

$$K_0 e^{j\psi} = \frac{z-1}{z+1}.$$

Soit

$$K_0 e^{j\psi} = \frac{(x_0-1)\cos\psi + jx_0 \sin\psi}{(x_0+1)\cos\psi + jx_0 \sin\psi} = X + jY.$$

Si X et Y représentent les coordonnées de K dans son plan, on trouve comme équation

$$X^2 + Y^2 - \frac{2x_0}{x_0+1} X + \frac{x_0-1}{x_0+1} = 0$$

qui est celle d'un cercle coupant l'axe des X aux points d'abscisses 1 et

$$\frac{x_0-1}{x_0+1},$$

et qui se confond par conséquent avec le cercle K symétrique par rapport à l'axe réel. Comme ce cercle

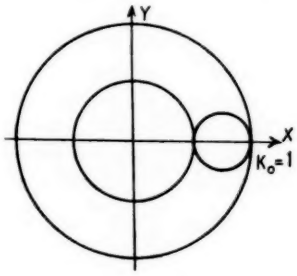


Fig. 3.4.

passe par le point $K_0 = 1$, il est nécessaire que le *cercle z initial soit tangent à l'axe imaginaire.*

3.2. *Matériel expérimental et mode opératoire.*

3.2.0. Les mesures se font à l'aide d'un détecteur d'ondes stationnaires. La figure 3.5, représente un tel appareil destiné aux longueurs d'ondes spatiales comprises entre 8 et 20 cm. Il se compose essentiellement d'une ligne coaxiale soigneusement construite, dont le conducteur extérieur est percé d'une mince fente longitudinale; une sonde associée à un détecteur (cristal, thermocouple ou bolomètre) et solidaire d'un chariot peut se déplacer le long de la ligne. En direction de la source il est possible plus loin, par des considérations de stabilité dans les mesures.

b. Les circuits associés à la sonde ne doivent pas entrer en résonance aiguë, c'est-à-dire qu'ils doivent présenter un amortissement appréciable : le détecteur (cristal, thermocouple ou bolomètre) suffit souvent à amener un amortissement convenable.

c. La mesure du taux d'ondes stationnaires doit de préférence être effectuée en examinant les phénomènes au voisinage du minimum de champ électrique. Le calcul suivant permet de comprendre le principe de la mesure de ρ dans ce cas.

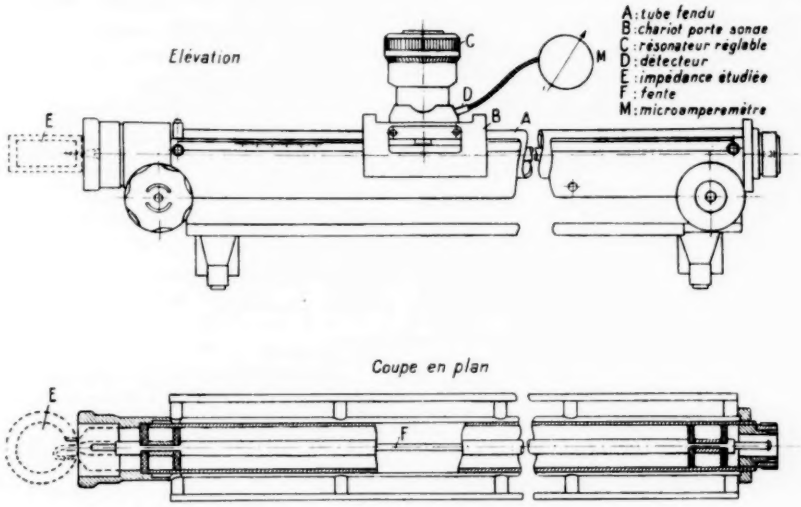


Fig. 3.5. — Ligne de mesure d'impédance.

de placer des adaptateurs d'impédance afin d'envoyer le maximum de puissance dans la ligne de mesure; dans la majeure partie des cas on peut avoir intérêt à intercaler un atténuateur; de tels organes ne modifient en rien le coefficient de réflexion de l'impédance à mesurer, comme le montre la théorie développée plus haut.

3.2.1. La sonde ne doit pas modifier considérablement la répartition des champs dans la ligne coaxiale; autrement dit les circuits qui lui sont associés doivent prélever une fraction aussi faible que possible de la puissance totale fournie par la source. Ce but peut être atteint en réunissant les trois conditions suivantes :

a. L'enfoncement de la sonde doit être suffisamment petit devant le rayon du coaxial. On est d'ailleurs limité dans ce sens, comme nous le verrons

Reprenons l'expression (3.8)

$$\frac{E}{E_A + E_B} = \frac{e^{i\beta x}}{1 + K_0 e^{i\psi}} \left[1 + K_0 e^{i(\psi - 2\beta x)}\right]$$

qui est minimum lorsque $\psi - 2\beta x = (2k+1)\pi$ $\frac{E_m}{E_A + E_B}$ prend la valeur

$$\frac{E_m}{E_A + E_B} = \frac{e^{i\beta x}}{1 + K_0 e^{i\psi}} \left[1 - K_0\right].$$

Pour un déplacement Δx à partir de ce minimum, le rapport $\frac{E}{E_A + E_B}$ devient

$$\frac{E_{\Delta x}}{E_A + E_B} = \frac{e^{i\beta(x+\Delta x)}}{1 + K_0 e^{i\psi}} \left[1 - K_0 e^{-2i\beta\Delta x}\right].$$

Comparons les modules de E_m et $E_{\Delta x}$:

$$\left|\frac{E_{\Delta x}}{E_m}\right|^2 = \frac{(1 - K_0 \cos^2 \beta\Delta x)^2 + K_0^2 \sin^2 2\beta\Delta x}{(1 - K_0)^2} = p^2.$$

Soit

$$\frac{1+K_0^2}{(1-K_0)^2}-\frac{2K_0}{(1-K_0)^2}\cos 2\beta\Delta x=p^2.$$

Or

$$K_0=\frac{\rho-1}{\rho+1};$$

on en tire aisément

$$\rho=\frac{\sqrt{p^2-\cos^2\beta\Delta x}}{\sin\beta\Delta x}.$$

Ayant déterminé le champ minimum E_m on mesure le déplacement Δx qui donne $E_{\Delta x}=pE_m$; ρ se déduit alors de l'expression précédente.

La construction d'un détecteur d'ondes stationnaires exige de grandes précautions du point de vue mécanique. Si l'enfoncement de la sonde varie au cours des déplacements le long de la ligne, il peut en résulter des erreurs importantes.

Le champ électrique radial dans un coaxial s'écrit en fonction du rayon $\frac{E}{E_0}=\frac{r_0}{r}$, r_0 représentant le rayon du conducteur intérieur et E_0 le champ sur ce conducteur.

Si la sonde a une profondeur s, la force électromotrice induite est proportionnelle à

$$e=\int_{r_1-s}^{r_1}E\,\mathrm{d}r=E_0r_0\int_{r_1-s}^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{r}=E_0r_0\,\mathrm{Log}\,\frac{r_1}{r_1-s},$$

r_1 symbolisant le rayon du conducteur extérieur.

Une variation Δs sur s entraîne une erreur relative sur e égale à

$$\frac{\Delta e}{e}=\frac{\Delta s}{s}\qquad(\text{en supposant } s\ll r_1).$$

On voit que pour éviter des erreurs considérables il convient que le support du chariot et le conducteur extérieur du coaxial soient travaillés dans la même masse métallique; les surfaces en contact du chariot et du support doivent être parfaitement dressées.

Dans le cas d'une ligne coaxiale, il est nécessaire que le conducteur central soit bien centré et parfaitement fixe par rapport au conducteur extérieur; le support principal sera évidemment placé en direction de la source à un endroit où les discontinuités d'impédance ne jouent aucun rôle; parfois on adjoint un second support en direction de la charge constitué par un manchon aussi mince que possible d'une matière à faibles pertes et à basse constante diélectrique (trolitul par exemple). Les réflexions résiduelles résultantes sont mesurées au cours d'essais préliminaires.

Dans le cas des guides ces dernières difficultés sont évidemment éliminées, mais il est nécessaire que la fente reste rigoureusement parallèle à l'axe.

Enfin, le problème le plus important est de réduire au minimum le rayonnement de la fente et la perturbation apportée par la sonde.

Le rayonnement de la fente dans le cas des coaxiaux est en principe très faible, puisqu'une fente longitudinale ne coupe pas de lignes de courant; l'effet peut en être mesuré en intercalant dans une ligne homogène un élément comportant la fente étudiée et en déterminant le coefficient de réflexion correspondant. Certains auteurs recommandent d'associer au chariot un dispositif qui permet de boucher la fente en dehors des points d'insertion de la sonde, d'autres préconisent l'emploi de fentes ayant une longueur d'approximativement $\frac{3\lambda}{4}$.

Dans le cas d'emploi d'un guide rectangulaire traversé par une onde TE_{01}, la fente longitudinale doit être placée au centre du grand côté.

Nous examinerons plus loin comment on peut étudier et par conséquent pratiquement éliminer la perturbation apportée par la sonde.

3.2.2. *Le détecteur.* — La sonde est associée à un détecteur (cristal ou thermo-couple). Le circuit de sonde est muni de paramètres d'adaptation qui permettent d'obtenir la puissance maximum dans le détecteur, pour une excitation donnée. Le signal détecté est conduit par l'intermédiaire d'un coaxial souple à un microampèremètre ou à un amplificateur.

Les thermocouples et certains cristaux ont une caractéristique de détection très sensiblement quadratique; cette loi peut être aisément vérifiée dans de nombreuses expériences, en particulier au cours des mesures de surtension de cavités. Le courant détecté n'est donc pas proportionnel à l'intensité des champs mais à la puissance.

Dans certains cas, on préférera maintenir le courant détecté à un niveau constant et mesurer le taux d'ondes stationnaires grâce à un atténuateur calibré placé en série avec le cristal.

La connaissance de la loi de détection des thermocouples et cristaux permet de déterminer les caractéristiques à donner à la sonde pour éviter les perturbations. On sait en effet que dans une ligne homogène court-circuitée, les champs sont répartis axialement selon une loi sinusoïdale; la présence d'une sonde modifiera légèrement cette loi et l'on retouchera les dimensions de la sonde jusqu'au moment où l'expérience montrera de nouveau une répartition très sensiblement sinusoïdale.

3.2.3. *Précision des mesures.* — L'examen des diagrammes montre que la précision dans la détermination du module de Z est d'autant meilleure que l'impédance à mesurer est plus voisine de l'impédance caractéristique.

Si ρ est de l'ordre de 1 la précision atteint aisément 2 %, elle n'est plus que de 10 % environ pour $\rho = 5$.

Par contre, la phase de l'impédance est plus aisée à déterminer lorsque les minima et les maxima deviennent bien distincts et facilement localisables; ceci requiert des valeurs élevées pour ρ.

Il y a donc un compromis à adopter, son choix dépendant essentiellement des renseignements que l'on désire tirer de l'expérience.

3.3. Application a la mesure des surtensions des cavités. — 3.3.0. Comme nous l'avons vu plus haut, il est impossible de faire une mesure absolue d'impédance par la méthode du taux d'ondes stationnaires; il est cependant certains problèmes où la grandeur que l'on cherche à déterminer est égale à un rapport d'impédances, et dans ce cas la méthode devient féconde.

La surtension d'une cavité répond à cette condition. On sait que la surtension d'un circuit est définie d'une manière générale par le rapport

$$Q = \frac{\omega \times \text{énergie emmagasinée par unité de temps}}{\text{énergie perdue par unité de temps}}.$$

Dans le cas d'une cavité, il est possible, au voisinage immédiat de la fréquence de résonance, de déterminer à l'aide du « principe d'équivalence » les éléments $L\,R\,C$ d'un circuit résonnant à constantes localisées ayant très sensiblement les mêmes propriétés; la surtension s'écrit alors

$$Q = \frac{L\omega}{R}.$$

Une cavité résonnante couplée à la ligne de mesure par une boucle peut être représentée par le schéma de la figure 3.6.

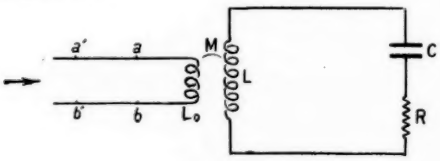


Fig. 3.6.

R comprend les pertes dans les parois aussi bien que les pertes dues à la charge par le faisceau (dans le cas d'une cavité de klystron) ou à toute autre charge couplée à la cavité. On suppose qu'aucune charge de ce type n'entre en résonance dans la bande de fréquence à étudier : par exemple, une charge peut contenir des éléments réactifs qui modifieront la fréquence de résonance de la cavité, mais ces éléments réactifs doivent être tels qu'ils conservent une valeur sensiblement constante dans une bande relative de fréquence égale à plusieurs fois $\frac{1}{Q}$.

D'autre part, nous supposons que le couplage avec la ligne de mesure se fait par une boucle, mais on peut aussi coupler la cavité à un guide d'ondes à l'aide d'une fente, qui agit lorsque ses dimensions sont bien choisies, comme une boucle inductive, ou à l'aide d'une sonde. La seule condition requise est que vu de la ligne de mesure, l'ensemble des discontinuités inévitables à la jonction de la ligne et du circuit, n'entre pas en résonance avec l'organe de couplage.

Ces restrictions étant faites, on peut écrire l'impédance d'entrée de la cavité vue des bornes ab de la boucle de couplage sous la forme

$$Z = j\omega L_0 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)} = X + jY.$$

En choisissant des grandeurs caractéristiques de la cavité

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R},$$

$$R_s(\text{impédance shunt}) = \frac{L}{CR}$$

et en introduisant l'écart relatif de fréquence

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0},$$

on peut écrire en restant dans le domaine : $|\delta| \ll 1$

$$X = \frac{M^2}{L^2}\,\frac{R_s}{1 + 4\delta^2 Q^2}, \tag{3.24}$$

$$Y = \omega L_0 - \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{2\delta Q}{1 + 4\delta^2 Q^2}. \tag{3.25}$$

C'est le comportement de l'impédance Z en fonction de ω (ou δ) qui fournit les informations relatives à la cavité.

En portant Z, après l'avoir normalisée à l'impédance caractéristique de la ligne de mesure, sur l'un des diagrammes définis plus haut, on constate que lorsque δ varie, Z se situe sur un cercle d'équation

$$z = j\omega L_0 + \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{1}{1 + 2j\delta Q} \quad \text{(cas du diagramme de Smith)}$$

ou

$$\left(x - \frac{M^2}{2L^2} R_s\right)^2 + (y - \omega L_0)^2 = \left(\frac{M^2}{2L^2} R_s\right)^2 \tag{3.26}$$

(R_s et ωL_0 sont normalisés).

Ce cercle a pour diamètre : $\frac{M^2}{L^2} R_s$; il est *tangent* à l'axe imaginaire au point d'abscisse ωL_0, les coordonnées du centre sont

$$\frac{M^2}{2L^2} R_s, \quad \omega L_0.$$

On peut suivre sur la circonférence les variations de l'impédance avec la fréquence en utilisant les équations précédentes.

Aux fréquences éloignées de la résonance, c'est-à-dire pour $|2\delta Q| \gg 1$, l'impédance est simplement celle de la boucle de couplage (soit $j\omega L_0$) et est représentée par le point de contact du cercle et de l'axe imaginaire. Pour les fréquences inférieures à la fréquence f_0 de résonance ($\delta < 0$) le point représentatif se déplace sur la demi-circonférence supérieure et pour les fréquences supérieures sur la demi-circonférence inférieure.

Enfin, pour $\delta = 0$: $x = \frac{M^2}{L^2} R_s$ et $y = \omega L_0$.

Ce sont les coordonnées de l'extrémité droite du diamètre horizontal et la fréquence f correspondante est la fréquence de résonance f_0 de la cavité.

Si l'on cherche les coordonnées des points pour lesquels $4\delta^2 Q^2 = 1$, on trouve

$$x_1 = \frac{M^2}{L^2} \frac{R_s}{2},$$

$$y_1 = \omega L_0 \pm \frac{M^2}{L^2} \frac{R_s}{2}.$$

Ce sont les extrémités du diamètre vertical du cercle d'impédance.

Connaissant la valeur de δ correspondante, on en déduit immédiatement

$$Q = \frac{1}{2\delta}.$$

Cette analyse montre qu'une détermination expérimentale du cercle d'impédance en fonction de la fréquence peut procurer une certaine quantité de renseignements sur la cavité : les fréquences aux extrémités du diamètre vertical déterminent Q, la fréquence à l'extrémité droite du diamètre horizontal est la fréquence de résonance f_0. De plus, le diamètre du cercle donne une information sur le couplage et l'impédance shunt.

Bien que les valeurs de M et R_s ne soient pas obtenues séparément, il existe beaucoup de cas où l'on fait varier seulement une des deux quantités, et l'on peut en déterminer les changements relatifs. Dans les mesures de charge d'un faisceau électronique, par exemple, seul R_s change et le diamètre du cercle variera proportionnellement à R_s. Les modifications des dimensions de la boucle de couplage pour une cavité donnée agiront uniquement sur M.

On peut remarquer ici que Q et R_s sont liées aux pertes de la même manière; tout phénomène tendant à changer l'impédance shunt apparente d'une cavité résonnante — un faisceau électronique par exemple — modifiera Q dans la même proportion. Par conséquent, une série de mesures relatives de R_s obtenues par la comparaison des diamètres des cercles peut être contrôlée en comparant les coefficients de surtension correspondants étant donné que les Q sont dans le même rapport que les diamètres; on doit encore souligner un fait lié à la répartition des fréquences sur le diagramme d'impédance : comme on l'a signalé plus haut, l'extrémité droite du diamètre horizontal correspond à $\delta = 0$, c'est-à-dire à la fréquence de résonance de la cavité. Si un phénomène quelconque modifie cette fréquence de résonance, la nouvelle résonance apparaîtra à l'extrémité du diamètre horizontal du nouveau cercle d'impédance. Ceci présente un intérêt spécial dans les mesures relatives à l'influence d'un faisceau électronique traversant la cavité; ce faisceau, en effet change la fréquence de résonance et accroît les pertes, les deux phénomènes peuvent être mesurés simultanément.

3.3.1. *Pratiquement comment tracera-t-on le cercle d'impédance en prenant comme paramètre variable la fréquence ?* — Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, il est difficile de définir l'origine vraie de la boucle de couplage, on sera donc conduit à prendre une origine arbitraire sur la ligne de mesure; le cercle d'impédance ainsi tracé à partir de la nouvelle origine est tangent à l'axe imaginaire. On peut en déterminer les caractéristiques essentielles de la manière suivante :

Si nous supposons connue la distance l de la nouvelle origine à la boucle, l'impédance réduite transformée z_l s'écrit

$$z_l = \frac{z + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j z \operatorname{tg} \beta l}.$$

Le cercle transformé a comme équation (après substitution)

$$z_l = \frac{j(\operatorname{tg}\beta l + \omega L_0)}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l} + \frac{M^2}{L^2} R_s \times \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l}{(1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l)^2 \left\{1 + j\left[2\delta Q + \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l}\right]\right\}}$$

soit

$$z_l = j(\omega L_0)' + \left(\frac{M^2}{L^2} R_s\right)' \frac{1}{1 + j[2\delta Q]} \tag{3.27}$$

avec

$$(3.28)\qquad (\omega L_0)' = \frac{\operatorname{tg}\beta l + \omega L_0}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l},$$

$$(3.29)\qquad \left(\frac{M^2}{L^2} R_s\right)' = \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta l}{(1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l)^2},$$

$$(3.30)\qquad (2\,\delta Q)' = 2\,\delta Q + \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l}.$$

Le nouveau cercle est tangent à l'axe imaginaire en $j(\omega L_0)'$, son diamètre a comme valeur $\left(\frac{M^2}{L^2} R_s\right)'$.

La distribution de la fréquence est modifiée par la présence du facteur $\frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l}$ ajouté à $2\,\delta Q$.

Si l'on cherche les points du cercle pour lesquels $(2\,\delta Q) = \pm 1$, on trouve

$$(2\,\delta Q)'_1 = 2\,\delta_1 Q + \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l} = 1$$

et

$$(2\,\delta Q)'_2 = 2\,\delta_2 Q + \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l} = -1,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$Q(\delta_1 - \delta_2) = 2\,\delta Q = 1.$$

Donc, si l'on connaît les fréquences correspondant aux extrémités du diamètre vertical, il est possible, comme dans le cas initial, d'en déduire la surtension de la cavité.

Une autre fréquence intéressante à déterminer est celle qui correspond à l'extrémité droite du diamètre horizontal. Cette fréquence est donnée par

$$(2\,\delta Q)' = 2\,\delta Q + \frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l} \times \frac{M^2}{L^2} R_s = 0.$$

En se souvenant que

$$R_s = \frac{\omega^2 L^2}{R},$$

on peut écrire

$$j(2\,\delta L\,\omega_0) + \frac{\omega^2 M^2}{j\left[\omega L_0 - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta l}\right]} = 0.$$

Le premier terme correspond à la réactance de la cavité seule et le second à la réactance ramenée par le couplage : cette dernière réactance correspond à l'impédance de la boucle augmentée de celle d'une ligne ouverte de longueur l. Autrement dit, l'équation précédente signifie que la réactance de la cavité est telle qu'elle équilibre exactement la réactance couplée.

En liaison avec ce que nous venons de dire, il est une question que nous devons examiner avec quelques détails, c'est celle de la variation de fréquence provoquée par le passage d'un faisceau d'électrons à travers la cavité.

La présence du faisceau modifie à la fois la fréquence de résonance et les pertes dans la cavité; il en résulte une diminution de Q et de R_s; donc la détermination des cercles d'impédance avec et sans faisceau fera apparaître des diamètres et des fréquences de résonance différents.

On constate aisément, en examinant les équations (3.27) à (3.30), que le rapport des diamètres de deux cercles initiaux se conserve dans les cercles transformés correspondants; il reste à savoir si le désaccord de fréquence provoqué par le faisceau demeure également inchangé dans la transformation; examinons à cet effet, la variation de fréquence à l'extrémité du diamètre horizontal des cercles transformés en présence du faisceau et en son absence.

D'après (3.30) la variation de fréquence à l'extrémité droite du diamètre dans l'opération qui permet de passer du cercle initial au cercle transformé s'écrit, en l'absence de faisceau,

$$\delta_{\text{sans faisceau}} = -\frac{M^2}{L^2}\frac{R_s}{Q}\frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l}$$

et en sa présence

$$\delta_{\text{faisceau}} = -\frac{M^2}{L^2}\frac{R_s}{Q'}\frac{\operatorname{tg}\beta l}{1 - \omega L_0 \operatorname{tg}\beta l}.$$

Or, nous avons vu plus haut que

$$\frac{R_s}{Q} = \frac{R_s}{Q'},$$

donc

$$\delta_{\text{sans faisceau}} = \delta_{\text{faisceau}}.$$

Donc la variation de fréquence de résonance peut être déterminée en se servant uniquement des propriétés des cercles transformés.

Il convient de signaler encore une propriété commune à tous les cercles d'impédance. Il arrive parfois que les extrémités du diamètre vertical, nécessaires pour déterminer Q ne font pas partie des points déterminés expérimentalement. Il est cependant possible de calculer Q en utilisant d'autres points : on trace une demi-droite ayant son origine au point de tangence de l'axe imaginaire et du cercle d'impédance et passant par un point expérimental $z = x + jy$ correspondant à une fréquence mesurée.

On a alors (*fig.* 3.7)

$$\frac{y - \omega L_0}{x} = \operatorname{tg}\theta.$$

Or, d'après les équations (3.28) et (3.30)

$$\frac{y - \omega L_0}{x} = 2(\delta Q)'.$$

Il en résulte que deux points d'impédance quelconque correspondant à des fréquences f_1 et f_2

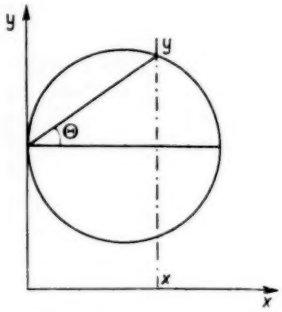


Fig. 3.7.

connues peuvent être utilisés pour calculer Q puisque

$$2(\delta_2 Q)' - 2(\delta_1 Q)' = 2\delta_2 Q - 2\delta_1 Q = \operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1,$$

d'où

$$Q = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{2(\delta_2 - \delta_1)}. \tag{3.31}$$

Tout ce qui précède démontre que le cercle transformé fournit toutes les informations relatives à la cavité, au même titre que le cercle initial, c'est-à-dire : Q et une grandeur proportionnelle à $\frac{M^2}{L^2} R_c$.

On peut même dire qu'il est indifférent de savoir si la conception de cercle initial a une quelconque importance, puisque n'importe quel point pris le long de la ligne de mesure peut servir d'origine fictive pour l'organe de couplage.

Il faut noter que la fréquence de résonance propre de la cavité n'est pas fournie par les mesures précédentes.

3.3.2. *Pratique des mesures.* — Dans les applications pratiques de cette méthode, le choix d'un point origine sur la ligne de mesure équivaut au choix d'un point particulier sur l'axe imaginaire comme point de départ du cercle des impédances. On assigne ainsi une abscisse arbitraire à la position des nœuds loin de la résonance et les variations de position des nœuds sont déterminées par rapport à cette valeur initiale arbitrairement choisie.

Si les mesures s'étendent sur une grande gamme de fréquences — cas des surtensions faibles — il est nécessaire de faire une correction pour tenir compte du déplacement des nœuds provoqué par les variations de la longueur d'onde.

Globalement le déplacement des nœuds correspondant à une variation de longueur d'onde de λ_1 à λ_2 s'écrit

$$\theta = \zeta_2 l_2 - \zeta_1 l_1,$$

$$\theta = 2\pi\left[\frac{l_2 - l_1}{\lambda_1} - \frac{l_2}{\lambda_1}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right],$$

Si $l_1 = 0$

$$\theta_{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\pi l_2}{\lambda_1}\left[1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}\right].$$

La correction relative s'écrit donc

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}.$$

Pratiquement, dans la plupart des mesures cette correction est trop faible pour que l'on ait à en tenir compte.

La valeur choisie pour l'angle initial est celle qui correspond au point de tangence avec l'axe imaginaire. Bien que ce choix soit purement arbitraire, certains angles initiaux conduisent à des cercles convenant mieux à l'interprétation des résultats (*fig.* 3-8).

Si le point initial se trouve à 90°, le point de tangence est à l'origine et dans ce cas le cercle est symétrique par rapport à l'axe réel, il est donc plus commode à tracer à partir des résultats expérimentaux, qu'un cercle quelconque. Il possède en outre des propriétés intéressantes :

Deux points d'impédance situés de part et d'autre de la résonance et ayant le même taux d'ondes stationnaires correspondent à des nœuds déplacés d'un même nombre de degrés, mais dans des directions opposées, par rapport à la position de résonance. On conçoit aisément que cette propriété simplifie la détermination de la fréquence de résonance, elle permet de tracer un cercle d'impédance avec un nombre réduit de mesures et facilite la recherche des erreurs expérimentales. Insistons en passant sur la signification que nous donnons à l'expression de « fréquence de résonance », c'est celle qui correspond à l'extrémité droite du diamètre horizontal.

Si le point initial se trouve à 0°, le point de tangence est rejeté à l'infini; le cercle se transforme en une droite verticale; ce diagramme est certainement celui qui, du point de vue pratique, est le plus intéressant à utiliser.

En reprenant l'expression (3.27) de z_l et en levant l'indétermination liée à la condition

$$1 - L_0 \omega \operatorname{tg} \beta l = 0,$$

on trouve comme équation de la droite

$$(3.32) \qquad z_l = \frac{\omega^2 L_0^2 + 1}{\frac{M^2}{L^2} R_s} \left[1 + j \left(2 \delta Q - \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\omega L_0}{1 + \omega^2 L_0^2} \right) \right].$$

la résistance et la réactance sont égales en valeur absolue.

Par conséquent, en utilisant le diagramme linéaire, on peut déterminer les points définis par (3.33) en prenant les intersections de la droite verticale et des deux demi-droites $y = \pm x$.

Le grand avantage du type de représentation considéré est que les fréquences correspondant à

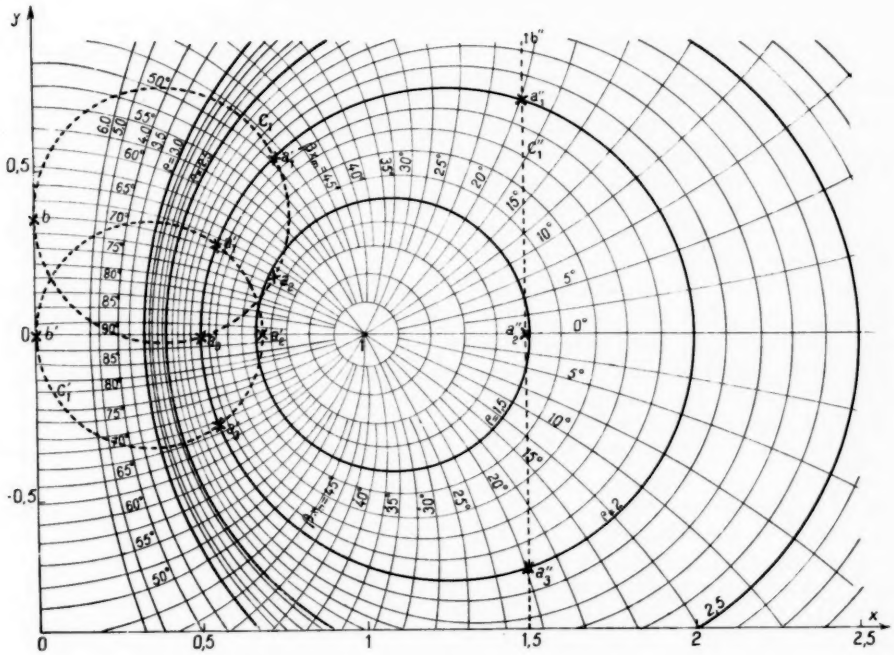


Fig. 3.8. — Diagramme de Smith (ou diagramme z).

On a tracé sur ce diagramme, pour illustrer la méthode de mesure des surtensions de cavités, décrite dans le texte, un certain nombre de cercles d'impédances : C_1, C'_1 et C''_1.

C_1 est le cercle initial obtenu à partir des points expérimentaux a_1, a_2 et a_3; il est tangent à l'axe imaginaire en b. Par un déplacement de l'origine arbitraire, il est possible de transformer C_1 en un cercle C'_1 symétrique par rapport à l'axe réel et tangent, à l'origine, à l'axe imaginaire.

Une autre transformation permet de faire correspondre la droite verticale C''_1 au cercle initial C_1; le point de tangence b'' avec l'axe imaginaire est rejeté à l'infini.

On constate immédiatement :

— que la partie active de l'impédance est constante et égale à l'abscisse de la droite verticale,

— que la distribution de fréquence est *linéaire*,

— qu'aux points correspondant à des fréquences telles que

$$(3.33) \qquad 2 \delta Q - \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\omega L_0}{1 + \omega^2 L_0^2} = \pm 1,$$

ces points d'intersection peuvent être calculées par une simple interpolation — ou extrapolation — linéaire à partir de fréquences quelconques mesurées et reportées sur la droite verticale.

Une autre propriété de cette représentation linéaire est particulièrement utile lorsqu'on effectue une série de mesures de charge sur une cavité : la distribution des fréquences reste constante quelle que soit la valeur de la charge dont le seul effet est de

déplacer la droite d'impédances le long de l'axe réel.

Considérons en effet la partie réactive de z_l

$$y = \frac{\omega^2 L_0^2 + 1}{\frac{M^2}{L^2} R_s} \left[2\,\delta Q - \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\omega L_0}{1 + \omega^2 L_0^2} \right].$$

La variation de fréquence le long de la droite verticale est donnée par

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{y_1 - y_2} = \frac{M^2}{2\,L^2(\omega^2 L_0^2 + 1)} \frac{R_s}{Q}.$$

La quantité ainsi définie est constante puisque $\frac{R_s}{Q}$ est indépendant de la charge. Ainsi, en faisant une série de mesures de Q, la distribution de fréquence ne doit être déterminée qu'une seule fois pour une cavité et une charge donnée; lorsque ensuite la charge varie, la seule mesure du taux d'ondes stationnaires minimum suffit pour situer la droite d'impédance et déduire tous les renseignements utiles.

Remarquons que Q est inversement proportionnel à l'abscisse de la droite représentative; cette abscisse est d'ailleurs égale au double de la distance séparant les points qui satisfont la relation $(2\,\delta Q)' = \pm 1$. En fait, cette propriété n'est pas spéciale au diagramme rectiligne mais s'étend à tous les diagrammes circulaires. Dans les discussions précédentes, nous avons en effet montré que le coefficient de surtension déterminé à partir de la position des points tels que $(2\,\delta Q)' = \pm 1$ est également inversement proportionnel au diamètre du cercle : c'est exactement la même propriété que nous avons dégagée de l'étude du diagramme rectiligne. Cette relation entre les deux types de diagrammes peut être mise en lumière en remarquant que si les mêmes caractéristiques d'un circuit sont représentées soit par une droite verticale, soit par un cercle tangent à l'origine, les impédances sont alors mesurées en des points de la ligne distants d'un quart de l'ongueur d'onde et la droite se déduit d'un cercle par une inversion de pôle (O, O) et de puissance 1. Donc, si le diamètre du cercle est proportionnel à Q, l'abscisse de la droite lui est inversement proportionnelle.

La discussion relative au diagramme rectiligne montre tous les avantages de cette représentation. Par exemple la mesure de Q peut être effectuée à partir de la détermination du taux d'ondes stationnaires et de la position relative des nœuds pour trois fréquences différentes.

Pour deux de ces fréquences, il n'y a que deux droites verticales qui coupent les deux cercles d'égal T. O. S. en des points correspondant à la différence de position des nœuds. Les mesures à la troisième fréquence donnent des résultats qui ne sont compatibles qu'avec une seule des verticales déterminées précédemment et permettent ainsi de faire la discrimination.

3.3.3. *Précision des mesures.* — Bien que trois points suffisent à déterminer complètement un cercle ou une droite d'impédance, on a intérêt à multiplier le nombre des mesures pour assurer un contrôle et accroître la précision.

Remarquons d'autre part que les points les plus intéressants sont ceux qui avoisinent la fréquence de résonance et que la moitié la plus utile du cercle d'impédance est parcourue par une variation de fréquence relative $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$. C'est dire que les mesures de variation de fréquence doivent être effectuées avec une grande précision. S'il était possible de mesurer par ce procédé les surtensions supérieures à 10 000, les ondemètres classiques deviendraient insuffisants et il conviendrait de faire la mesure à l'aide de dispositifs à changement de fréquence. La précision sur la mesure de la fréquence f_0 offre évidemment beaucoup moins d'importance. En fait, comme nous allons le voir, la principale limitation a une tout autre origine que la sensibilité insuffisante de l'ondemètre. Il importe de s'assurer que le cercle d'impédance est tangent à l'axe vertical, autrement dit que loin de la résonance, le taux d'ondes stationnaires devient pratiquement infini. S'il n'en est pas ainsi, on peut en conclure que soit la ligne de mesure, soit les organes de liaison avec la cavité, présentent des pertes importantes; il n'est plus possible d'obtenir un diagramme d'impédance se réduisant à une droite verticale, et il convient d'examiner les modifications à apporter aux résultats acquis jusqu'à présent.

Nous allons à cet effet étudier l'influence des pertes dans les parois de la ligne de mesure. Reprenons l'expression

$$z_l = \frac{z + j\,\mathrm{tg}\,\beta l}{1 + j\,z\,\mathrm{tg}\,\beta l}.$$

Si la ligne présente des pertes, la théorie élémentaire montre que l'impédance caractéristique doit être remplacée par

$$Z_c' = Z_c\left(1 + j\frac{\theta}{2}\right)$$

et β par

$$\beta' = \beta\left[1 - j\frac{\theta}{2}\right]$$

avec

$$\theta = \frac{R}{L\,\omega},$$

R et L étant les résistance et self-inductance par unité de longueur.

Nous évaluerons toujours les impédances par rapport à l'impédance caractéristique réelle Z_c. Avec ces notations et ces conventions z_l devient

$$(3.34)\qquad z_l = \frac{(x+jy)+j\left(1+j\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\beta' l}{1+j(x+jy)\left(1-j\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\beta' l};$$

or

$$\operatorname{tg}\beta' l = \operatorname{tg}\left[\beta l - j\frac{\theta}{2}\beta l\right].$$

Soit en première approximation en supposant

$$\beta l \leqslant (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta < 1,$$

$$\operatorname{tg}\beta' l = \operatorname{tg}\beta l - j\frac{\theta\beta l}{2\cos^2\beta l},$$

(3.34) devient en négligeant les termes en θ^2

$$z_l = \frac{x+\frac{\theta}{2}\left[\frac{\beta l}{\cos^2\beta l}-\operatorname{tg}\beta l\right]+j[y+\operatorname{tg}\beta l]}{\left\{\begin{array}{l}1+y\operatorname{tg}\beta l+\frac{\theta x}{2}\left[\frac{\beta l}{\cos^2\beta l}+\operatorname{tg}\beta l\right]\\ +j\left[x\operatorname{tg}\beta l+\frac{\theta y}{2}\left(\frac{\beta l}{\cos^2\beta l}+\operatorname{tg}\beta l\right)\right]\end{array}\right\}}.$$

Supposons pour simplifier le calcul que $\beta l = k\pi$.

Dans ce cas il convient de prendre $L_0\omega_0 = 0$. Cette restriction ne nuit pas à la généralité de l'exposé puisqu'il est toujours possible dans le cas où $L_0\omega_0$ diffère de zéro de définir une longueur de ligne équivalente incorporant $L_0\omega_0$.

Z_c s'écrit :

$$(3.35)\qquad z_l \simeq \frac{x+\frac{\theta}{2}k\pi(1+x^2+y^2)+jy}{1+x\theta k\pi}.$$

Le cercle représentatif n'est plus tangent à l'axe imaginaire; l'abscisse à l'origine a pour valeur $\frac{\theta}{2}k\pi$.

Posons

$$x = \frac{r_s}{1+\tau^2}, \qquad y = -r_s\frac{\tau}{1+\tau^2}$$

avec

$$r_s = \frac{M^2}{L^2}\frac{R_s}{Z_c}.$$

Écrivons par analogie

$$z_l = x' + jy'$$

avec

$$x' = \frac{r'_s}{1+\tau'^2}, \qquad y' = -r'_s\frac{\tau'}{1+\tau'^2}.$$

La relation (3.35) nous donne immédiatement en posant $m = \frac{\theta}{2}k\pi$

$$(3.36')\qquad \tau' = r_s\frac{\tau}{r_s+m[1+\tau^2+r_s^2]},$$

$$(3.36'')\qquad r_s = r'_s + m[r'^2_s - 1].$$

Si l'on cherche expérimentalement les points tels que

$$\tau' = \pm 1 \,[x' = |y'|],$$

il leur correspond en supposant $m \leqslant 1$ une valeur de τ

$$\tau \simeq 1 + m\left[\frac{1}{r'_s}+r'_s\right]$$

ou en l'exprimant en fonction de r'_s qui constitue la donnée expérimentale

$$\tau \simeq 1 + m\left[\frac{1+r'^2_s+2m(r'^2_s-1)}{r'_s+m(r'^2_s-1)}\right]$$

ou encore, puisque $m \leqslant 1$

$$\tau \simeq 1 + m\left[\frac{1}{r'_s}+r'_s\right],$$

la variation relative de surtension provoquée par les pertes dans la ligne s'écrit

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\tau'-\tau}{\tau'} \simeq -m\left[\frac{1}{r'_s}+r'_s\right].$$

Si l'on passe du cercle expérimental au cercle symétrique par rapport à l'axe réel, on voit immédiatement que m et r'_s sont les abscisses des extrémités du diamètre horizontal.

On en déduit sans peine la correction $\frac{\Delta Q}{Q}$.

De même l'impédance r_s se déduit aisément des données expérimentales en utilisant la relation (3.36″).

Si les pertes sont localisées à la jonction de la ligne et de la cavité étudiée, le calcul montre que les conclusions sont identiques; les corrections ne font intervenir que les grandeurs expérimentales m et r'_s. On constate sur l'expression de $\frac{\Delta Q}{Q}$ que cette quantité est minimum lorsque $r'_s = 1$.

Dans ces conditions, à la résonance, l'impédance ramenée sur la ligne est égale à l'impédance caractéristique, il n'y a pas d'ondes stationnaires et les pertes parasites sont évidemment très faibles. On voit donc l'intérêt de dimensionner les boucles de couplage de telle sorte que le taux d'ondes stationnaires soit minimum au voisinage de la résonance.

Si l'on suppose nulles les pertes localisées, on peut fixer quelques ordres de grandeur.

Prenons une ligne coaxiale en laiton dont les conducteurs ont des diamètres de 30 et 10 mm et effectuons des essais à une fréquence de 3000 Mc : s. La théorie nous donne

$$\theta = \frac{1+\frac{d_0}{d_1}}{\operatorname{Log}\frac{d_0}{d_1}}\,\frac{1}{d_0}\sqrt{\frac{1}{2\pi\mu\sigma\omega}} \qquad (\sigma \text{ conductibilité du métal}).$$

$\theta \simeq 3.10^{-4}$.

Si $k = 2$

$$m = \frac{\theta}{2} k\pi \simeq 10^{-3}.$$

Dans ces conditions l'erreur $\frac{\Delta Q}{Q}$ n'est que de 0,2 % si $r'_s = 1$ et de 2 % pour $r'_s = 10$.

En fait la principale perturbation est apportée par les pertes localisées dont l'importance est difficile à chiffrer et seule l'expérience permet de fixer dans chaque ligne l'ordre de grandeur des surtensions que l'on peut mesurer avec une précision donnée.

Si l'on tolère une erreur de 5 %, une ligne coaxiale permettra la détermination de surtensions de l'ordre de 5 000 (en ondes centimétriques); avec un guide cette valeur supérieure est portée à 10 000 environ.

3.3.4. *Emploi du diagramme de Rieke.* — Comme nous l'avons déjà remarqué, le diagramme polaire des K fournit dans la plupart des cas des renseignements aussi utiles que le diagramme cartésien des z, il possède en outre l'avantage de faciliter les transformations de cercles qui se réduisent à de simples rotations autour de l'origine.

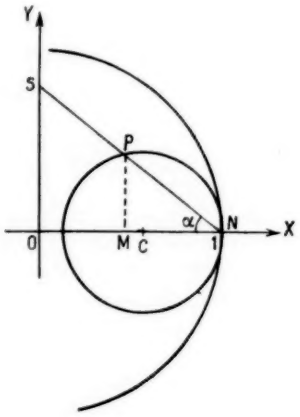


Fig. 3.9.

Si nous considérons le diagramme linéaire du plan des z d'équation

$$z = x_0[1 + j\,\mathrm{tg}\,\alpha],$$

il se transforme dans le plan des K en un cercle K centré sur l'axe réel et passant par les points

$$K = 1 \qquad [\rho = \infty]$$

et

$$K = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \qquad [\rho = x_0].$$

Le centre a pour abscisse

$$OC = \frac{x_0}{x_0 + 1}.$$

On constate aisément qu'entre les coordonnées du point courant P (X, Y) existe la relation

$$\frac{Y}{1 - X} = \frac{x_0}{x_0 + 1}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Soit

$$\frac{MP}{MN} = \frac{OC}{ON}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad [\overline{ON} = 1].$$

Si l'on prolonge NP jusqu'à son intersection S avec l'axe OY, on voit immédiatement que OS est déterminé par

$$OS = \frac{OC}{ON}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_0}{x_0 + 1}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Comme x, qui mesure le taux d'ondes stationnaires minimum est une constante pour une cavité et un couplage déterminés, et comme d'autre part

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2\,\delta Q = \frac{M^2}{L^2} R_s \frac{\omega L_0}{1 + \omega^2 L_0^2},$$

on en conclut que OY est une échelle linéaire de fréquence qu'il suffira d'étalonner connaissant deux points du cercle K dont les fréquences correspondantes sont connues expérimentalement.

Comme tous les cercles K se déduisent les uns des autres par rotation, il est possible d'effectuer le tracé dont nous venons de parler sur un cercle quelconque.

Les fréquences qui déterminent la surtension donnent à tg α la valeur ± 1; elles correspondent sur l'axe OY aux points d'abscisses $\frac{x_0}{x_0 + 1}$.

Remarque importante. — La méthode que nous venons d'examiner nécessite trois mesures au moins pour la détermination d'une impédance. On peut concevoir une méthode où les trois mesures indispensables seraient fournies par la lecture des courants détectés dans trois sondes fixes réparties le long de la ligne. La relation (3.8) montre que la comparaison de ces trois courants suffit à déterminer K_0 et ψ. Une telle méthode ne peut guère être employée que dans un laboratoire spécialisé.

3.4.o. *Mesure dynamique de la surtension.* — Les remarques précédentes suggèrent une méthode de mesure où la fréquence du signal varierait périodiquement et où la sonde demeurerait fixe.

Imaginons qu'une ligne de longueur l terminée par l'impédance Z_s à déterminer est excitée à l'aide d'une source de force électromotrice $E = E_0\, e^{j\omega t}$ de résistance interne égale à l'*impédance caractéristique.* Reprenons les équations générales (3.1) et (3.2) légèrement remaniées

$$V = V_1\, e^{j\beta x} + V_2\, e^{-j\beta x}, \tag{3.37}$$

$$I = \frac{1}{Z_c}\left[V_1\, e^{j\beta x} - V_2\, e^{-j\beta x}\right] \tag{3.38}$$

pour $x = l$

$$\frac{Z_s}{Z_c} = \frac{V_1\, e^{j\beta l} + V_2\, e^{-j\beta l}}{V_1\, e^{j\beta l} - V_2\, e^{-j\beta l}}.$$

On en déduit

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \dfrac{Z_s}{Z_c}}{\dfrac{Z_s}{Z_c} - 1}\, e^{-2j\beta l} = \frac{1}{K\, e^{2j\beta l}}, \tag{3.39}$$

K étant le coefficient de réflexion correspondant à Z_s

A l'origine

$$V_0 = V_1 + V_2,$$
$$Z_c I_0 = V_1 - V_2,$$

et

$$E_0 = V_0 + Z_c I_0.$$

Donc

$$V_1 = \frac{E_0}{2}$$

et d'après (3.39)

$$V_2 = \frac{E_0}{2} K\, e^{2j\beta l}.$$

En un point d'abscisse z

$$V_z = \frac{E_0}{2}\left[e^{j\beta z} + K\, e^{2j\beta l}\, e^{-j\beta z}\right],$$
$$= \frac{E_0}{2}\, e^{j\beta z}\left[1 + K_0\, e^{j(\psi + 2\beta(l-z))}\right].$$

Un détecteur *quadratique* placé en z_1 donnera un courant détecté de la forme

$$i_{s_1} = \alpha E_0^2\left[1 + K_0^2 + 2 K_0 \cos(\psi + 2\beta s_1)\right] \quad \text{avec } s_1 = l - z_1,$$

α est un coefficient de proportionnalité; à un détecteur semblable placé en Z_2 correspondra un courant

$$i_{s_2} = \alpha E_0^2\left[1 + K_0^2 + 2 K_0 \cos(\psi + 2\beta s_2)\right].$$

Si par un procédé quelconque on sait retrancher les courants i_{s_1} et i_{s_2} il en résulte un courant global

$$I_1 = 4\alpha E_0^2 K_0 \sin\left[\psi + \beta(s_1 + s_2)\right] \sin\beta(s_1 - s_2)$$

soit

$$I_1 = 4\alpha E_0^2 \sin\beta(s_1 - s_2)$$
$$\times \left\{ Y(\beta)\cos\beta(s_1 + s_2) + X(\beta)\sin\beta(s_1 + s_2)\right\},$$

X et Y représentant les coordonnées du point courant dans le diagramme des K.

Une troisième sonde placée à la distance s_3 sera traversée par un courant i_{s_3} qui associé au courant i_{s_1} donnera par différence

$$I_1' = 4\alpha E_0^2 \sin\beta(s_1 - s_3)$$
$$\times \left\{ Y(\beta)\cos\beta(s_1 + s_3) + X(\beta)\sin\beta(s_1 + s_3)\right\}.$$

Si l'on dispose des distances s_1, s_2 et s_3 de telle sorte que

$$\begin{cases} \beta[s_1 + s_2] = \beta(s_1 + s_3) + \dfrac{\pi}{2}, \\ \beta[s_1 - s_2] = \beta(s_1 - s_3), \end{cases} \tag{3.40}$$

le courant I_1 s'écrit alors

$$I_1' = 4\alpha E_0^2 \sin\beta(s_1 - s_2)$$
$$\times \left\{ -Y(\beta)\sin\beta(s_1 + s_2) + X(\beta)\cos\beta(s_1 + s_2)\right\}.$$

Si après amplification convenable, on applique les courants I_1 et I_1 respectivement aux plaques verticales et horizontales d'un oscillographe cathodique, on voit se dessiner sur l'écran, lorsque la fréquence varie, un arc de cercle — ou même un cercle complet — qui est la représentation de K. L'équation de cette courbe est en effet en notations complexes et en éliminant les coefficients

$$4\alpha E_0^2 \sin\beta(s_1 - s_2) :$$
$$Z = X\cos\beta(s_1 + s_2) - Y\sin\beta(s_1 + s_2)$$
$$+ jY\cos\beta(s_1 + s_2) + jX\sin\beta(s_1 + s_2)$$
$$Z = e^{j\beta(s_1 + s_2)}\left[X + jY\right] = K\, e^{j\beta(s_1 + s_2)}.$$

On voit que le cercle tracé n'est pas centré sur l'axe horizontal, on peut l'amener dans cette position par un déplacement global de l'ensemble des trois sondes que l'on suppose solidaires d'un même chariot.

En agissant sur la profondeur de modulation du signal incident, il est possible après étalonnage préalable, de coter le cercle K en fréquence et de déduire de son tracé, conformément à la théorie statique exposée plus haut, tous les renseignements utiles.

Il convient d'insister sur la nécessité d'avoir des variations de fréquence relativement faibles, de telle sorte que les quantités $\beta(s_1 - s_2)$ et $\beta(s_1 + s_2)$ demeurent sensiblement constantes et que la relation (3.40) soit vérifiée.

La méthode, assez difficile à mettre en œuvre, rendra de grands services pour la mesure des surtensions dans un domaine de fréquence étroit princi-

palement lorsqu'on aura à comparer les performances d'un grand nombre de cavités au voisinage d'une même fréquence.

Nous verrons plus loin qu'il est possible d'obtenir à l'aide d'un cornet électromagnétique une source ayant l'impédance caractéristique comme résistance interne et de force électromotrice constante. Nous examinerons également la possibilité de rendre les résultats indépendants des modulations d'amplitude parasites du signal excitateur.

3.5.0. *Conclusion.* — Le procédé de mesure que nous venons d'étudier s'appuie sur l'assimilation de la cavité à un dipôle. Il offre donc le gros avantage sur celui que nous allons étudier plus loin de ne pas nécessiter l'emploi d'une seconde boucle. D'autre part la possibilité de tracer le cercle complet d'impédance à l'aide d'un grand nombre de mesures permet, d'une part de s'assurer que la cavité ne présente pas de résonances parasites, d'autre part de vérifier que la présence de la sonde n'apporte pas de perturbation sensible à la répartition normale des champs dans la ligne de mesures; il s'agit évidemment là d'une confirmation *a posteriori* qui ne peut être effectuée qu'après un certain nombre d'essais sur plusieurs cavités très différentes.

Dans les mesures rapides, la surtension pourra être déduite du tracé de l'une des courbes $\rho = \rho(\delta)$ ou $\operatorname{tg} \beta x_m = \psi[\delta]$ comme le montre l'analyse des expressions (3.20) et (3.21) lorsqu'on y remplace r et y par leurs valeurs en fonction de $(2\,\delta Q)'$ et de $\left(\frac{M^2}{l^2} R_s\right)'$.

Pour fournir un ordre de grandeur, nous dirons qu'avec les lignes coaxiales la méthode « dipôle » permet la détermination de surtensions comprises entre 200 et 5 000; la limite supérieure peut être relevée jusqu'à 10 000 environ par l'emploi des guides.

4. Mesure de la surtension par la méthode du « quadripôle ».

4.0. Nous allons maintenant étudier une méthode de mesure des surtensions qui se ramène à la recherche des caractéristiques de transformation de la cavité étudiée au voisinage de la fréquence de résonance; une telle méthode exige donc un circuit d'excitation et un circuit de réception dont les caractéristiques propres peuvent intervenir pour modifier les résultats; il conviendra donc de déterminer et au besoin d'éliminer expérimentalement leur influence. C'est d'ailleurs la méthode la plus classique, celle que l'on utilise couramment dans l'étude des circuits résonnants en ondes plus longues.

Nous allons faire un examen critique du procédé pour déterminer quelles conditions doivent satisfaire les différents éléments des circuits d'excitation et de réception.

Considérons une source de f. e. m. $E\,e^{jt\omega t}$ et d'impédance globale $Z_1 = X_1 + jY_1$ qui débite par l'intermédiaire d'une impédance de couplage jK_1 dans le circuit (0) étudié : $Z_0 = X_0 + jY_0$. Le circuit (2) de détection, d'impédance $Z_2 = X_2 + jY_2$ est associé au circuit (0) par une impédance de couplage jK_2.

Les équations qui permettent de déterminer les courants I_0, I_1 et I_2 s'écrivent

$$E = Z_1 I_1 + jK_1 I_0,$$
$$0 = jK_1 I_1 + jK_2 I_2 + Z_0 I_0,$$
$$0 = Z_2 I_2 + jK_2 I_0.$$

On en déduit

$$(4.1)\qquad I_0 = -E\,\frac{jK_1 Z_2}{K_1^2 Z_2 + K_2^2 Z_1 + Z_1 Z_0 Z_2},$$

$$(4.2)\qquad I_1 = E\,\frac{K_2^2 + Z_0 Z_2}{K_1^2 Z_2 + K_2^2 Z_1 + Z_1 Z_0 Z_2},$$

$$I_2 = E\,\frac{K_1 K_2}{K_1^2 Z_2 + K_2^2 Z_1 + Z_1 Z_0 Z_2},$$

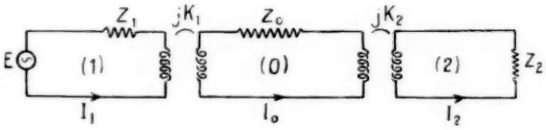


Fig. 4.1.

On peut encore écrire

$$I_2 = -E\,\frac{\dfrac{K_1}{Z_1}\,\dfrac{K_2}{Z_2}}{\dfrac{K_1^2}{Z_1} + \dfrac{K_2^2}{Z_2} + Z_0}.$$

Posons pour plus de commodité

$$\sigma_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\alpha_1 + j\beta_1},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\alpha_2 + j\beta_2},$$

$$(4.4)\qquad I_2 = \frac{-EK_1\sigma_1 K_2\sigma_2}{K_1^2\alpha_1 + K_2^2\alpha_2 + Y_0 + j[Y_0 + K_1^2\beta_1 + K_2^2\beta_2]}.$$

Si les circuits (1) et (2) ne présentent pas de grosses variations d'impédances dans la zone de fréquences utiles et si les couplages sont suffisamment lâches

$$\left[\frac{K_1^2}{|Z_1|} \ll |Z_0|;\quad \frac{K_2^2}{|Z_2|} \ll |Z_0|\right],$$

on en déduit que le courant I_2 passera par un maximum d'amplitude, quand $Y_0 + K_1^2\beta_1 + K_2^2\beta^2 = 0$ (condition de résonance).

La résistance équivalente du circuit (o) en charge s'écrit

$$X = K_1^2 \alpha_1 + K_2^2 \alpha_2 + X_0.$$

Admettons maintenant que la fréquence de résonance est très peu modifiée par les couplages; il en résulte que la surtension en charge s'écrit

$$Q = \frac{L\omega_0}{X}$$

alors qu'à vide

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{X_0}$$

Donc

$$(4.5) \qquad \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{L\omega_0}[X - X_0] = \frac{K_1^2 \alpha_1 + K_2^2 \alpha_2}{L\omega_0}.$$

A la résonance I_2 devient

$$I_2 = -E\frac{K_1 \alpha_1 - K_2 \alpha_2}{K_1^2 \alpha_1 + K_2^2 \alpha_2 + X_0} = -EQ\frac{K_1 \alpha_1 K_2 \alpha_2}{L\omega_0}.$$

Supposons que le détecteur placé dans le circuit de réception est *quadratique*; le courant détecté s'exprime à la résonance par

$$(4.6) \qquad i_0 = pE^2 \frac{Q^2}{L(\omega_0)^2} K_1^2 K_2^2 [\alpha_1^2 + \beta_1^2][\alpha_2^2 + \beta_2^2]$$

p étant un facteur de proportionnalité.

L'équation (4.5) s'écrit encore

$$(4.7) \qquad \frac{1}{Q} = mK_1^2 + nK_2^2 + \frac{1}{Q_0}$$

et l'équation (4.6)

$$(4.8) \qquad \frac{i_0}{Q^2} = aK_1^2 K_2^2.$$

Les paramètres m, n et a étant indépendants de K_1^2 et K_2^2.

Supposons que dans une première série de mesures, on fasse varier K_1, laissant K_2 fixe; en portant sur un diagramme cartésien en ordonnée $\frac{1}{Q}$ et en abscisse $\frac{i_0}{Q^2}$, on obtient une courbe représentative (1) qui est une droite d'équation

$$y - \left[\frac{1}{Q_0} + nK_2^2\right] = \frac{m}{aK_2^2}x$$

et d'ordonnée à l'origine

$$y_1 = \frac{1}{Q_0} + nK_2^2.$$

Laissons maintenant K_1 fixe et faisons varier K_2 on obtient une droite représentative (2) d'équation

$$y - \left[\frac{1}{Q_0} + mK_1^2\right] = \frac{n}{aK_1^2}x.$$

Les deux droites se coupent en un point C; on démontre aisément que

$$y_c - y_1 = mK_1^2.$$

En menant par le point P (x_c, y_1) une droite (3) parallèle à (2) on constate qu'elle coupe l'axe des Y en un point d'ordonnée $\frac{1}{Q_0}$. *On détermine ainsi graphiquement la surtension Q_0 à vide.*

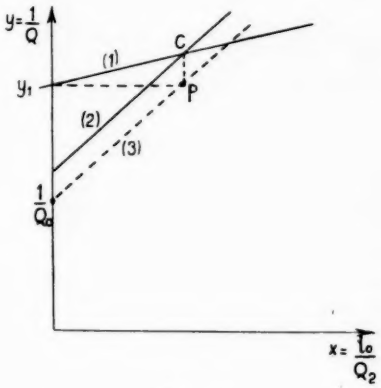


Fig. 4.2.

4.1. Conditions de la mesure. — La mesure de Q se fait aisément en comparant les valeurs du courant détecté pour différents écarts à la fréquence de résonance.

Si la détection est quadratique, on a en effet

$$\frac{i_\delta}{i_0} = \frac{1}{1 + 4(Q\delta)^2}$$

i_0 représentant le courant maximum.

Posant

$$\frac{i_\delta}{i_0} = \frac{1}{n} : Q = \frac{1}{2\delta}\sqrt{n-1}.$$

En mesurant δ pour différentes valeurs de n (2, 3, 4, 5 par exemple) on doit s'assurer que Q demeure constant ce qui permet de confirmer l'hypothèse d'une détection quadratique.

Si le couplage aux circuits d'excitation et de réception est effectué à l'aide de boucles orientables b_1 et b_2, on peut aisément faire varier les impédances K_1 et K_2 sans modifier sensiblement les caractéristiques de ces circuits (Z_1 et Z_2). Le fait que les points expérimentaux viennent se placer sur une droite dans le diagramme (4.2) apporte une confirmation supplémentaire à l'hypothèse faite sur la nature de la détection. En réalité, il est souvent difficile d'associer à la cavité étudiée des boucles orientables et il est préférable de modifier

le couplage en utilisant les propriétés des lignes de transmission.

Supposons que la f. e. m. E de résistance interne R excite le circuit (o) étudié par l'intermédiaire d'une ligne de transmission de longueur l et d'impédance caractéristique Z_c.

La théorie classique des quadripôles permet de démontrer que le circuit considéré est équivalent à une source placée entre les points C et D, de force électromotrice E' égale à la tension que l'on mesu-

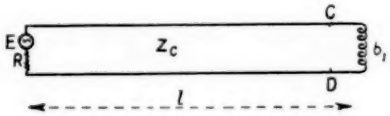


Fig. 4.3.

rerait en circuit ouvert entre ces mêmes points et d'impédance interne Z_1 égale à la résistance R transformée par la ligne de transmission. Dans ces conditions, en utilisant les équations de propagation des lignes, on démontre facilement que

$$E' = \frac{E_0}{\cos\beta l}\,\frac{1}{1 - j\dfrac{R}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l}$$

et

$$(4.9)\qquad Z_1 = Z_c\,\frac{\dfrac{R}{Z_c} + j\operatorname{tg}\beta l}{1 + j\dfrac{R}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l},$$

Nous sommes donc ramenés à un problème où les constantes sont localisées; E défini plus haut prend la valeur E' et Z_1 devient

$$Z_1 = Z_c\,\frac{\dfrac{R}{Z_c} + j\operatorname{tg}\beta l}{1 + j\dfrac{R}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l} + j\,l_0\omega$$

l_0 représentant la self-inductance de la boucle b_1.

Dans ces conditions, on voit que $\dfrac{K_1}{Z_1}E'$ qui dans l'expression de I_2 définit le couplage global entre les circuits (1) et (o) prend la forme

$$\frac{K_1}{Z_1}E' = \frac{K_1}{Z_c}\,\frac{E_0}{\cos\beta l}\,\frac{1 + j\dfrac{R}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l}{1 - j\dfrac{R}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l}$$
$$\times\left[\frac{R}{Z_c}\left(1 - l_0\frac{\omega_0}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l\right) + j\left[\operatorname{tg}\beta l + \frac{l_0\omega_0}{Z_c}\right]\right].$$

Dans l'expression de i_0, le coefficient précédent intervient par le carré de son module

$$(4.10)\qquad i_0 = pE_0^2\,\frac{Q^2}{(L\omega_0)^2}\,\frac{K_2^2}{|Z_2|}\,\frac{K_1^2}{Z_c^2\cos^2\beta l}$$
$$\times\left[\frac{R^2}{Z_c^2}\left(1 - l_0\omega_0\frac{\operatorname{tg}\beta l}{Z_c}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\beta l + \frac{l_0\omega_0}{Z_c}\right)^2\right].$$

L'expression (4.5) s'écrit alors avec la nouvelle valeur de α_1, déduite de (4.9)

$$(4.11)\qquad \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{L\omega_0}\,\frac{K_1^2}{R\cos^2\beta l}$$
$$\times\left[\frac{R^2}{Z_c^2}\left(1 - \frac{l_0\omega_0}{Z_c}\operatorname{tg}\beta l\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\beta l + \frac{l_0\omega_0}{Z_c}\right)^2\right] + K_2^2\alpha_2^2\Big).$$

On voit donc, en comparant (4.10) et (4.11) que la variation de couplage entre le circuit d'excitation et le circuit étudié peut être obtenue indifféremment en agissant sur K_1 ou sur l (Z_c et R demeurant fixes). L'élimination de la fonction de βl qui intervient dans les expressions de $\frac{1}{Q}$ et de $\frac{i_0}{Q^2}$ conduit à des relations linéaires entre ces deux grandeurs — exactement comme l'élimination de K_1.

Une démonstration semblable nous prouverait que l'on peut faire varier le couplage entre les circuits (o) et (2) par adjonction d'une ligne de transmission de longueur variable entre le détecteur et la boucle b_2.

Le tracé des droites 1, 2 et 3 du diagramme 4.2 qui permet de déterminer la surtension à vide se fera sans difficulté en modifiant les longueurs l_1 et l_2 des lignes de transmission symbolisant les circuits (1) et (2) ou plus simplement encore en modifiant la longueur « électrique » de ces lignes par adjonction d'adaptateurs latéraux d'un type que nous étudierons à l'occasion des mesures de puissance.

4.2. Quelques précautions a prendre. — Il est nécessaire d'introduire entre le générateur et le circuit d'excitation un atténuateur qui évite l'effet des variations de charge sur la puissance fournie par la source et par conséquent sur la fréquence d'oscillation. On choisira de préférence un atténuateur à résistance constitué soit par un coaxial dont le milieu diélectrique présente des pertes élevées (pyrotenax par exemple) soit encore par un coaxial rempli de poudre de fer agglomérée.

Une atténuation ou puissance supérieure à 10 db évite pratiquement toute réaction nuisible et comme nous le verrons plus loin, au-dessus de cette valeur, on peut assimiler l'atténuateur à une source de force électromotrice E_0 égale à $\sqrt{\dfrac{P_0 Z_{c1}}{n}}$ et de résistance interne Z_{c1} :

P_0 étant la puissance dissipée dans l'atténuateur.
Z_{c1} l'impédance caractéristique,
n, l'atténuation exprimée en rapport de puissance.

Un dispositif de même nature doit évidemment être placé entre la source et l'ondemètre.

La mesure de variation de fréquence est effectuée soit à l'aide d'un ondemètre à cavité, dont la sensibilité doit être d'autant meilleure que la surtension mesurée est plus grande, soit encore au moyen d'un dispositif mélangeur : on utilise alors un oscillateur local à fréquence fixe dont le signal vient se mélanger dans un cristal à celui qu'engendre le générateur de mesure; la différence de fréquence et ses variations ultérieures se mesurant sans peine dans un récepteur classique.

Pour éviter tout effet de synchronisation entre les deux oscillateurs on les découple fortement par l'emploi des atténuateurs déjà décrits sommairement. Enfin, il convient d'obtenir uniquement le produit de mélange de fréquence $F_1 - F_2$ à l'exclusion de tout autre, ce que l'on réalise en donnant au signal local par exemple une amplitude bien plus élevée qu'au signal incident.

L'emploi de générateurs pour ondes centimétriques — klystron reflex ou triodes spéciales — fournissant une puissance maximum de 200 à 500 mW permet, en dépit des atténuateurs de découplage de faire des mesures simples sans qu'il soit nécessaire d'amplifier le signal détecté à la sortie de la cavité étudiée.

Soulignons en passant que les sources doivent être parfaitement filtrées afin d'éviter une modulation de fréquence parasite qui se manifeste par un accroissement apparent de la largeur de bande des circuits étudiés ou une indétermination dans les pointés de fréquence à l'aide des ondemètres.

Dans la plupart des cas, le courant détecté sera déterminé au moyen d'un microampèremètre de faible résistance interne. Il convient d'insister sur la nécessité d'introduire une forte atténuation entre l'élément détecteur (cristal ou thermocouple) et l'appareil de mesure pour éviter qu'un rayonnement parasite de la source puisse exciter directement le détecteur et aussi pour provoquer un amortissement supplémentaire du circuit de réception et le rendre pratiquement apériodique dans une large bande de fréquences.

Enfin, une précaution importante s'impose; il faut s'assurer que la force électromotrice E_0 demeure constante lorsque la fréquence varie dans les limites exigées par la mesure; d'où la nécessité de placer à la sortie de l'atténuateur de la ligne d'excitation un cristal ou un thermocouple faiblement couplé destiné à vérifier la constance du niveau.

4.3. La pratique des mesures montre que le procédé décrit est très indiqué pour la détermination des surtensions comprises entre 2 000 et 10 000.

4.4. Mesures dynamiques. — Il est préférable de tracer la courbe de résonance de la cavité étudiée par un procédé dynamique : un oscillographe cathodique dont la base de temps horizontale est balayée par un signal proportionnel à la fréquence et dont l'amplificateur vertical est excité par le courant détecté sortant de la cavité permet d'effectuer ce tracé.

Supposons qu'un signal modulé en fréquence que nous supposerons de la forme

$$E = E_0 \cos\left(2\pi F_0 t - \frac{\Delta F_0}{f} \cos 2\pi f t\right) \tag{4.12}$$

excite la cavité étudiée :

F_0 représente la haute fréquence porteuse,
ΔF_0 la profondeur de modulation de fréquence,
f la fréquence de modulation (50 p : s par exemple),

la fréquence instantanée s'écrit

$$F = F_0 + \Delta F_0 \sin 2\pi f t$$

et l'écart instantané par rapport à la fréquence porteuse

$$\Delta F = \Delta F_0 \sin 2\pi f t.$$

Si l'on examine théoriquement l'action du signal (4.12) sur un circuit résonnant à la fréquence F_0 et de surtension Q, on démontre que si la condition (4.13) : $4Q^2 \frac{\Delta F_0}{F_0} \frac{f}{F_0} \leqslant 1$ est satisfaite, le courant détecté à la sortie de la cavité est donné très sensiblement par l'expression

$$\frac{i\delta}{i_0} = \frac{1}{1 + 4Q^2\left(\frac{\Delta F_0}{F_0} \sin 2\pi f t\right)^2},$$

or $\frac{\Delta F_0}{F_0} \sin 2\pi f t$ mesure précisément l'écart relatif de fréquence.

La courbe dynamique $\frac{i\delta}{i_0} = \varphi(\Delta F)$ se superpose donc à la courbe statique définie plus haut.

Comme pratiquement $\frac{2\Delta F_0}{F_0}$ est de l'ordre de $\frac{1}{Q}$ l'inégalité (4.13) peut encore s'écrire

$$2Q \frac{f}{F_0} \leqslant 1.$$

Si

$$Q = 50\,000, \qquad f = 50, \qquad F_0 = 3,10^9,$$

elle est largement vérifiée.

Toute la mesure consistera donc à déterminer simultanément sur la courbe tracée dynamiquement le rapport $\frac{i\delta}{i_0}$ et la variation de fréquence qui lui

correspond. L'amplification du courant $i\delta$ qui est un courant basse fréquence ne présente aucune difficulté; on applique le signal sortant du cristal sur la paire de plaques de déflection verticale de l'oscillographe.

La mesure de la variation de fréquence est plus délicate. Nous décrirons deux procédés possibles :

4.4.1. *La méthode du double battement.* — On prélève à la sortie de l'oscillateur de mesure une fraction du signal modulé en fréquence et le mélange à un signal de fréquence fixe F' voisine de F_0. A la sortie du mélangeur on recueille un produit de battement dont la fréquence s'écrit

$$\varphi = F_0 - F' + \Delta F_0 \sin 2\pi ft.$$

Pour fixer un ordre de grandeur si $\Delta F_0 = 1$ Mc : s. On prendra $F_0 - F' = 10$ Mc : s.

On fait de nouveau battre le signal à fréquence φ avec celui d'un générateur moyenne fréquence étalonné et l'on applique le second produit de mélange à l'entrée d'un amplificateur basse fréquence à bande suffisamment étroite.

Si on applique le signal sortant de l'amplificateur à la paire de plaques verticales d'un oscillographe dont la base de temps horizontale est représentée par une tension proportionnelle à la tension modulante. $U \sin 2\pi ft$, on verra se dessiner une courbe dont l'allure est représentée sur la figure 4.4. La forme de cette courbe dépend essentiellement de la caractéristique amplitude-fréquence de l'amplificateur vertical de l'oscillographe.

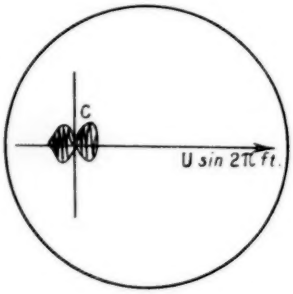


Fig. 4.4.

Le point C correspond à une fréquence instantanée nulle, c'est-à-dire qu'en ce point

$$F_0 - F' + \Delta F_0 \sin 2\pi ft = \varphi$$

φ étant la fréquence lue sur le générateur de mesure étalonné.

Lorsque φ varie, le point C se déplace et il devient possible d'étalonner en fréquence la base de temps horizontale. Le « pointé » de fréquence est d'autant plus fin que l'amplificateur de l'oscilloscope a une bande plus étroite.

Pratiquement, on additionnera à l'entrée de l'oscilloscope le courant $i\delta$ et le signal précédent et l'on obtiendra une courbe conforme à celle que représente la figure 4.5. En faisant varier φ entre deux valeurs φ_1 et φ_2 telles que C passe du point C_1 au point C_2 d'ordonnée $\frac{i_0}{2}$ on mesure aisément Q par la relation $Q = \frac{F_0}{\varphi_2 - \varphi_1}$.

L'ensemble des trois opérations — les deux mélanges et la détection du courant $i\delta$ — peut être effectué à l'aide d'un seul cristal *fig.* 4-5).

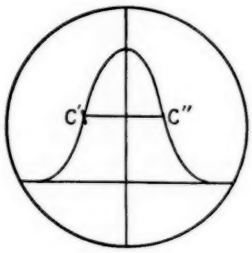


Fig. 4.5.

Cette méthode qui exige une mise en œuvre importante permet la mesure de surtensions aussi élevées que 50 000.

4.4.2. *Méthode de l'ondemètre.* — Supposons que l'on couple une ondemètre à résonance à l'oscillateur modulé, on trouvera à la sortie un courant détecté i_m de la forme

$$i_m = \frac{(i_m)_0}{1 + 4Q_m^2\left[\frac{\Delta F_m}{F_0} - \frac{\Delta F_0}{F_0}\sin 2\pi ft\right]^2}$$

Q_m symbolise la surtension de l'ondemètre;

ΔF_m mesure la différence entre la fréquence de résonance de l'ondemètre et la fréquence porteuse du signal;

i_m passe par une valeur maximum $(i_m)_0$ lorsque

$$\Delta F_m = \Delta F_0 \sin 2\pi ft = \Delta f.$$

Cette méthode, si l'on sait lire avec précision ΔF_m permet donc de déterminer la fréquence correspondant à chaque point de la courbe de résonance étudiée.

Si l'on superpose à l'entrée de l'amplificateur vertical de l'oscillographe les courants i_m et i_δ on obtient une courbe dont l'allure est représentée sur la figure (4.6).

La résonance de i_m est marquée par une perturbation P d'autant plus accusée que $\frac{Q_m}{Q}$ est plus élevé. On mesurera la variation de fréquence en modifiant la résonance de l'ondemètre de telle manière que P passe du point C_1 au point C_2 déjà définis plus haut.

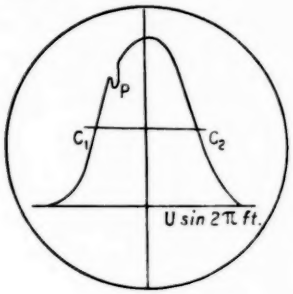


Fig. 4.6.

Cette mesure sous sa forme élémentaire suppose d'abord que la sensibilité de l'ondemètre est bien supérieure à l'écart relatif de fréquence $\frac{1}{Q}$ et surtout que $Q_m > Q$. Or, dans la pratique, cette dernière condition est rarement satisfaite et d'autant moins que l'on demande aux mesures dynamiques de faciliter la détermination des surtensions très élevées.

Pour pallier à cet inconvénient il faut remplacer le signal i_m par un autre qui varie beaucoup plus rapidement avec la fréquence instantanée et par conséquent bien plus étroit.

Nous allons décrire deux procédés qui permettent d'atteindre ce but :

4.4.21. Le détecteur de sortie des cavités est presque toujours constitué par un cristal quadratique débitant dans une résistance R parcourue par le courant

$$i_m = \frac{(i_m)_0}{1 + 4 Q_m^2 x^2} \left[x = \frac{\Delta F_0}{F_0} \sin 2\pi f t \right].$$

On constate en posant

$$y = \frac{i_m}{(i_m)_0}$$

que la pente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8 Q_m^2 x}{(1 + 4 Q_m^2 x^2)^2}$$

est maximum en valeur absolue lorsque

$$|Q_m x| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

et prend la valeur

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{max} = \frac{9}{4\sqrt{3}} Q_m.$$

Notons en passant que pour

$$4 Q^2 x^2 = 1, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm Q.$$

Déterminons maintenant les caractéristiques d'un courant j_m qui serait proportionnel à la dérivée $\frac{dy}{dx}$ (c'est le courant qui traverserait un condensateur basse fréquence mis en parallèle sur le cristal)

$$j_m = j_0 \frac{dy}{dx} = -j_0 \frac{8 Q_m^2 x}{1 + 4 Q_m^2 x^2}.$$

Ce courant s'annule pour $x = 0$ et la pente en ce point

$$\frac{d\left[\frac{j_m}{j_0}\right]}{dx} = -8 Q_m^2.$$

On voit donc que cette courbe transformée est bien plus aiguë que la courbe initiale et si l'on superpose sur l'écran de l'oscillographe : le courant

$$i_0 = \frac{i_0}{1 + 4 Q^2 x^2}$$

et le courant

$$j_m = -j_0 \frac{8 Q_m^2 x}{1 + 4 Q_m^2 x^2}$$

les pentes aux points satisfaisant à la relation $4 Q^2 x^2 = 1$, seront dans le rapport $\frac{8 Q_m^2}{Q}$ ce qui permettra d'avoir une mesure très précise avec Q_m relativement faible.

Pratiquement, pour obtenir l'effet cherché on remplacera la résistance R par un système capacité C, résistance R mises en série.

Si l'on suppose que le cristal peut être considéré comme une source basse fréquence de f. e. m. :

$$e = \frac{e_0}{1 + 4 Q_m^2 \frac{\Delta F_0}{F_0} \sin^2 2\pi f t}$$

et de résistance interne ρ, le courant j_m traversant R sera solution particulière de l'équation différentielle

$$j_m + C[R + \rho] \frac{dj_m}{dt} = C \frac{de}{dt}$$
$$= C e_0 \frac{d}{dt} \left[1 + 4 Q_m^2 \left(\frac{\Delta F_0}{F_0} \right)^2 \sin 2\pi f t \right]^{-1}$$

ou en prenant comme variable indépendante $z = 2\pi f t$

$$j_m + 2\pi f C (R + \rho) \frac{dj_m}{dz}$$
$$= 2\pi f C e_0 \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1 + 4 Q_m^2 \left(\frac{\Delta F_0}{F_0} \right)^2 \sin^2 z} \right].$$

Si l'on se borne au domaine

$$4Q_m^2\left(\frac{\Delta F}{F_0}\right)^2 \sin^2\pi \ll 1$$

et si l'on suppose

$$2\pi fC(R+\rho) \ll 1$$

on trouve sensiblement

$$j_m \simeq -\frac{2\pi fCe_0}{\sqrt{1+4[2\pi fC(R+\rho)]^2}} \times 4Q_m^2\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2 \sin[4\pi ft - \operatorname{arc\,tg} 4\pi fC(R+\rho)].$$

On constate que j ne s'annule plus pour

$$4\pi ft = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots,$$

mais pour

$$4\pi ft = \operatorname{arc\,tg} 4\pi fC(R+\rho).$$

Comme on suppose

$$a = 2\pi fC(R+\rho) \ll 1,$$

le déphasage est très faible et l'on peut écrire

$$j_m \simeq -2\pi fCe_0 4Q_m^2\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2 \sin 4\pi ft,$$

$$j_m \simeq -a\frac{e_0}{R+\rho} 4Q_m^2\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2 \sin 4\pi ft.$$

Soit encore en représentant par $\Delta F = \Delta F_0 \sin 2\pi ft$ l'écart instantané par rapport à la fréquence porteuse F_0

$$j_m \simeq -a\frac{e_0}{R+\rho} 8Q_m^2\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2 \frac{\Delta F}{F_0}\sqrt{1-\frac{\left(\frac{\Delta F}{F_0}\right)^2}{\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2}}.$$

On vérifie une fois de plus que la pente à l'origine

$$\left(\frac{\mathrm{d}j_m}{\mathrm{d}\frac{\Delta F}{F_0}}\right)_{\Delta F=0}$$

est proportionnelle à Q_m^2.

Pratiquement pour obtenir plus de précision dans les résultats, on associera à l'oscillographe cathodique un commutateur électronique et l'on superposera les images de i_2 et j_m au lieu de les additionner. On verra sur l'écran deux courbes, comme représenté sur la figure (4.7).

On fait varier la fréquence F de l'ondemètre de telle sorte que le point D passe de D_1 en D_2 et l'on calcule Q par la formule :

$$Q = \frac{F_1 - F_2}{F_0}.$$

Par le même procédé on pourra mesurer des variations faibles de la fréquence de résonance de la cavité. On remarquera en effet que l'intersection de la courbe j_m avec l'axe $O_m x_m$ ne dépend pas des paramètres définissant l'ondemètre mais uniquement de $a = 2\pi fC(R+\rho)$ que l'on peut supposer constant au cours d'une mesure de faible durée.

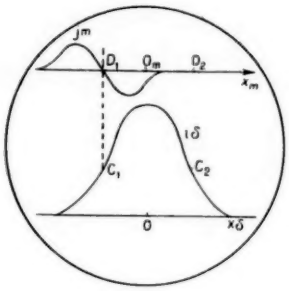


Fig. 4.7.

4.4.2.2. Il est possible de réduire encore la largeur de l'image représentative de la fréquence en associant au cristal détecteur un circuit à bande étroite centré sur un harmonique pair élevé de la fréquence de modulation f. L'opération peut s'effectuer en plusieurs étapes pour accroître la finesse de l'image, la résistance de charge du cristal est remplacée par un circuit bouchon résonnant sur la fréquence $2nf$ placé dans le circuit grille d'une pentode amplificatrice; la charge d'anode est constituée par un circuit bouchon identique; c'est la tension recueillie aux bornes de celui-ci que l'on applique à l'entrée de l'amplificateur vertical de l'oscillographe. On peut dire pour chiffrer l'effet produit que tout se passe comme si la surtension de l'ondemètre était multipliée par n.

4.5. Quelle que soit la méthode employée, les conditions expérimentales à satisfaire sont les suivantes :

a. Les couplages à l'entrée et à la sortie de la cavité doivent être suffisamment lâches et variables. On déterminera la surtension à vide par un procédé graphique, exactement comme dans la méthode statique.

b. Le cristal doit avoir une caractéristique « quadratique ».

c. Les amplificateurs ne doivent provoquer aucune distorsion sensible des courbes.

d. Le signal modulé en fréquence doit être pratiquement exempt de modulation d'amplitude.

Pour la mesure de surtensions élevées la présence d'une légère modulation d'amplitude n'offre pas d'inconvénient majeur.

Dans les autres cas il est absolument nécessaire de remédier à ce défaut : deux types de solutions sont possibles :

4.5.1. *Dans un premier type* on agit directement sur l'oscillateur.

Prenons pour fixer les idées un klystron reflex : la modulation de fréquence est obtenue en faisant varier périodiquement la polarisation du réflecteur; il se superpose à la modulation utile une modulation parasite d'amplitude et pratiquement on constate que la puissance fournie varie grossièrement selon une loi de la forme

$$\frac{P}{P_0} = 1 - \alpha^2 \left[\frac{\Delta V}{V_0}\right]^2,$$

ΔV représentant l'amplitude de la modulation du réflecteur autour de la polarisation, V_0, qui donne la puissance maximum P_0.

De même supposons que l'on module le Wehnelt d'un tel tube; dans un domaine convenablement limité; on peut écrire

$$\frac{P}{P_0} = 1 - \beta^2 \left[\frac{\Delta U}{U_0}\right]^2,$$

U_0 symbolisant la polarisation du Wehnelt qui fournit la puissance maximum.

Il existe également dans ce cas une modulation de fréquence mais elle demeure beaucoup plus faible que dans le premier cas pour une égale variation relative de polarisation.

Supposons maintenant que dans le cas de modulation par le réflecteur on détecte à l'aide d'un cristal « quadratique » faiblement couplé au générateur un courant proportionnel à l'écart entre la puissance instantanée et la puissance minimum que nous supposons égale à $\frac{P_0}{2}$.

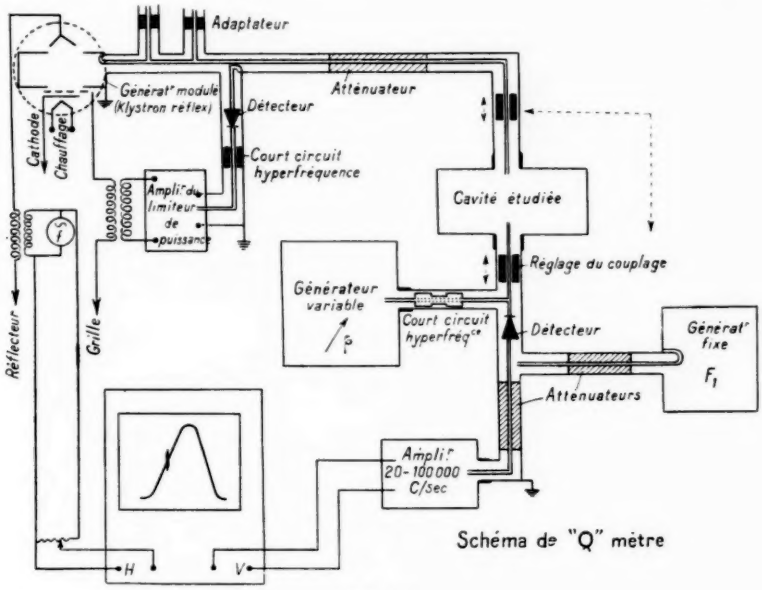


Fig. 4-8.

Nous amplifions ce courant et obtenons un signal périodique de la forme (4.14)

$$\Delta U = K U_0 \left[P - \frac{P_0}{2}\right]$$

que nous appliquons au Wehnelt. La puissance maximum fournie par le klystron s'écrit alors

$$\frac{P_{max}}{P_0} = 1 - \beta^2 K^2 \left[P_{max} - \frac{P_0}{2}\right]^2.$$

Comme la puissance maximum P_{min} est égale à $\frac{P_0}{2}$ l'équation précédente devient en posant $\frac{P_{max}}{P_{min}} = y$

$$\frac{y}{2} = 1 - \beta^2 K^2 P_m^2 [y - 1]^2.$$

d'où

$$\beta^2 K^2 P_{min}^2 = \frac{2 - y}{2[y - 1]^2}. \tag{4.15}$$

S'il n'y a pas régulation ($K = 0$) on trouve comme attendu $y = 2$.

Si βK tend vers l'infini, Y tend vers 1.

L'expérience permet de déterminer β, connaissant la puissance minimum P_{min} et le taux de modulation d'amplitude admissible, on en déduit aisément K. En combinant les relations (4.14) et (4.15) on trouve

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\sqrt{2-Y}}{\beta\sqrt{2}}.$$

Ce qui détermine la tension alternative ΔU à la sortie de l'amplificateur A. Comme le Wehnelt ne consomme en principe aucune puissance, la réalisation de A ne présente pas de difficulté.

4.5.2. *Dans un deuxième type de solution*, on ne corrige pas le signal incident mais on réalise électroniquement la division du courant i_2 par la puissance instantanée correspondante. Nous verrons à propos des caractéristiques de modulation comment on peut atteindre ce résultat.

La figure 4.8 donne un schéma de montage utilisant la première solution.

4.6. Conclusion. — Nous avons déjà eu l'occasion d'indiquer que la méthode du « quadripôle » permet de mesurer des surtensions bien plus élevées que la méthode du « dipôle », jusqu'à 10 000 par les procédés statiques et 50 000 en faisant appel au tracé dynamique.

C'est la méthode à employer pour la mesure de la surtension à vide des cavités d'essais ou des cavités utilisées comme étalons de fréquence; la seconde méthode est particulièrement indiquée dans la détermination des caractéristiques des cavités de klystrons.

5. Mesure des impédances shunt des cavités rhumbatron.

L'impédance shunt est une des grandeurs qui joue un rôle primordial dans l'étude de l'échange d'énergie entre le champ électromagnétique d'une cavité et le faisceau électronique qui la traverse.

Si nous considérons une cavité rhumbatron dont la symétrie est cylindrique l'impédance shunt doit être mesurée entre les points C et D.

Si E représente le champ électrique axial et W la puissance dissipée dans la cavité, l'impédance shunt Z_s est définie par

$$W = \frac{\left(\int_0^z \vec{E}.\mathrm{d}\vec{s}\right)^2}{2Z_s}. \tag{5.1}$$

Soit encore par

$$Z_s = L\omega_0 Q_0 = \frac{Q_0}{C\omega_0}, \tag{5.2}$$

où ω_0 représente la pulsation de résonance;

Q_0 la surtension;

L et C respectivement la self-inductance et la capacité équivalente de la cavité vue des points C et D.

Deux méthodes générales peuvent être employées pour mesurer Z_s chacune dérivant de la détermination des grandeurs figurant soit dans la relation (5.1), soit encore dans la relation (5.2).

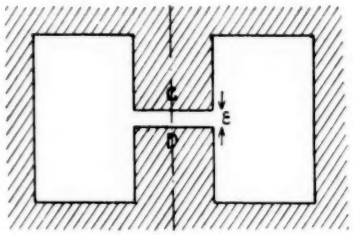


Fig. 5.1.

5.10. *Première méthode* (s'appuyant sur la définition $Z_s = L\omega_0 Q_0$). — Dans l'intervalle ε l'énergie apparaît essentiellement sous forme électrique et le champ demeure constant à condition que l'on ne s'écarte pas trop de l'axe.

Supposons que l'on introduise axialement un bâtonnet de rayon R_1 constitué par une matière diélectrique imparfaite dont on a mesuré au préalable la constante diélectrique K et l'angle de perte θ.

Si l'on représente par C la capacité équivalente et Q_0 le coefficient de surtension de la cavité vide

$$Q_0 = C\omega_0 Z_s.$$

L'introduction du bâtonnet va diminuer légèrement la fréquence de résonance et la surtension; en effet si l'on représente par γ la capacité du bâtonnet tout se passe comme si l'on ajoutait en parallèle sur Z_s une résistance shunt $\frac{1}{\gamma\omega'_0 \operatorname{tg}\theta}$, ω'_0 symbolisant la nouvelle pulsation de résonance.

La surtension en charge s'écrit

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{\omega'_0 C'}\left[\frac{1}{Z_s} + \gamma\omega'_0 \operatorname{tg}\theta\right],$$

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{\omega_0 C}{\omega'_0 C'}\left[\frac{1}{Z_s} + \gamma\omega'_0 \operatorname{tg}\theta\right]\frac{Z_s}{Q_0},$$

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{\mathcal{C}\omega'_0}{\mathcal{C}\omega_0}\left[\frac{1}{Z_s} + \gamma\omega'_0 \operatorname{tg}\theta\right]\frac{Z_s}{Q_0} = \frac{\omega'_0}{\omega_0}\left[\frac{1}{Z_s} + \gamma\omega'_0 \operatorname{tg}\theta\right]\frac{Z_s}{Q_0},$$

si la fréquence de résonance est peu modifiée, on trouve

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_0} + \frac{Z_s}{Q}\gamma\omega_0 \operatorname{tg}\theta.$$

Soit

$$Z_s = \left(\frac{Q_0}{Q_c} - 1\right)\frac{1}{\gamma\omega_0 \operatorname{tg}\theta}$$

γ est déterminé par les caractéristiques du bâtonnet

$$\gamma^{\text{cm}} = \frac{KR_1^2}{4\varepsilon}$$

et en farads

$$\gamma = 0,278.10^{-12}\frac{KR_1^2}{\varepsilon}$$

(R_1 et ε sont mesurés en centimètres). Donc

$$Z_s^{\text{ohms}} = 0,575\frac{10^{12}}{F_0}\frac{\varepsilon}{R_1^2}\frac{1}{K \operatorname{tg}\theta}\left[\frac{Q_0}{Q_c} - 1\right].$$

On voit que la précision sera d'autant meilleure que le diélectrique sera plus mauvais.

On n'a pas intérêt à accroître R_1 car les hypothèses simplificatrices faites plus haut ne demeurent plus valables.

On peut encore déterminer Z_s en mesurant la variation de fréquence provoquée par l'introduction du bâtonnet.

De la relation

$$LC\omega_0^2 = 1$$

on déduit

$$\frac{\Delta F_0}{F_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{C},$$

$$\left|\frac{\Delta F_0}{F_0}\right| = \frac{\omega_0 Z_s}{2Q_0} \times 0,278.10^{-12}\frac{(K-1)R_1^2}{\varepsilon}.$$

Soit

$$Z_s^{\text{ohms}} = \frac{1,14}{(K-1)}\frac{Q_0}{F_0}\frac{\varepsilon}{R_1^2}\frac{\Delta F_0}{F_0}10^{12}. \tag{5.4}$$

Cette détermination est en général beaucoup plus précise que la précédente.

5.11. *Ordres de grandeur.* — Prenons un klystron reflex fonctionnant aux environs de $F_0 = 3\,000$ Mc:s, la cavité est caractérisée par les grandeurs suivantes

$$\varepsilon = 0,1, \qquad Z_s = 150\,000, \qquad Q_0 = 1500.$$

Si pour le bâtonnet diélectrique

$$K = 3, \qquad \operatorname{tg}\theta = 2.10^{-3} \qquad \text{et} \qquad R_1 = 0,1 \text{ cm}.$$

on trouve par la première méthode

$$\frac{Q_0}{Q_c} = 1,16.$$

La précision de la mesure n'est donc pas élevée.

Par contre, en faisant appel à la seconde méthode la variation relative de fréquence est égale à

$$\frac{\Delta F_0}{F_0} = 18.10^{-3}.$$

Un ondemètre de qualité moyenne permet de mesurer cet écart relatif avec une erreur très faible.

5.12. *Détermination de K et* tg θ. — La détermination de K et tg θ s'effectuera en introduisant le bâtonnet cylindrique dans une cavité de forme simple dont tous les éléments peuvent être calculés avec précision.

Considérons la cavité de forme cylindrique représentée sur la figure 5.2. Le diélectrique n'est pas homogène; dans un rayon R_1 auteur de l'axe il est caractérisé par une constante diélectrique K_1 et au delà par une constante diélectrique K_0. Nous supposons en première analyse que les pertes sont nulles.

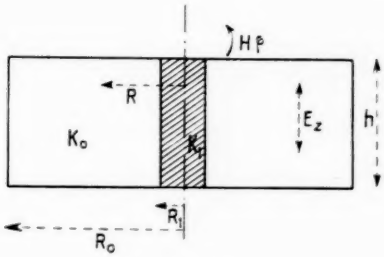


Fig. 5.2.

Si l'on se borne à étudier l'état vibratoire de cette cavité où les seules composantes non nulles sont le champ électrique longitudinal E_z et le champ magnétique circulaire H_φ on trouve comme expression de ces composantes en un point distant de R

$$H_\varphi = AJ_1\left[\frac{\omega\sqrt{K}}{C}R\right] + BN_1\left[\frac{\omega\sqrt{K}}{C}R\right],$$

$$E_z = \frac{j}{\sqrt{K}}\left\{AJ_0\left[\frac{\omega\sqrt{K}}{C}R\right] + BN_0\left[\frac{\omega\sqrt{K}}{C}R\right]\right\},$$

ω représente la pulsation,
C la vitesse de la lumière,
A et B sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites.

Dans le domaine $0 < R < R_1$

$$E_z = E_0 J_0\left[\frac{R}{C}\omega\sqrt{K_1}\right],$$

$$H_\varphi = -j\sqrt{K_1}E_0 j_1\left[\frac{R}{C}\omega\sqrt{K_1}\right].$$

Pour $R = R_1$ écrivons qu'il y a conservation des composantes tangentielles des champs

$$(5.5)\qquad AJ_0\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_0}\right] + BN_0\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_0}\right] = E_0 J_0\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_1}\right],$$

et

$$(5.6)\qquad \sqrt{K_0}\left\{AJ_1\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_0}\right] + BN_1\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_0}\right]\right\} = \sqrt{K_1}\,E_0 J_1\left[\frac{R_1\omega}{C}\sqrt{K_1}\right].$$

Enfin la composante E_z s'annule pour $R = R_0$

$$(5.7)\qquad AJ_0\left[\frac{R_0\omega}{C}\sqrt{K_0}\right] + BN_0\left[\frac{R_0\omega}{C}\sqrt{K_0}\right] = 0.$$

Le système des trois équations homogènes (5.5), (5.6) et (5.7) en A, B et E_0 permet de déterminer la pulsation de résonance ω et la longueur d'onde correspondante

Posons

$$\frac{\omega\sqrt{K_0}}{C} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \beta_0,$$

$$\frac{\omega\sqrt{K_1}}{C} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \beta_1,$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{K_1}{K_0}}\,\beta_0 = n\beta_0.$$

Les équations précédentes deviennent

$$(5.8)\qquad AJ_0[\beta_0 R_1] + BN_0(\beta_0 R_1) - E_0 J_0[n\beta_0 R_1] = 0.$$

$$(5.9)\qquad AJ_1[\beta_0 R_1] + BN_1(\beta_0 R_1) - nE_0 J_1[n\beta_0 R_1] = 0.$$

$$(5.10)\qquad AJ_0[\beta_0 R_1] + BN_0(\beta_0 R_1) = 0.$$

En écrivant que ces trois équations en A_1, B et E_0 sont compatibles, on trouve que β_0 est déterminé par l'équation transcendante

$$(5.11)\qquad \frac{J_0(\beta_0 R_0)}{N_0(\beta_0 R_0)} = \frac{J_0(n\beta_0 R_1)J_1(\beta_0 R_1) - nJ_1(n\beta_0 R_1)J_0(\beta_0 R_1)}{J_0(n\beta_0 R_1)N_1(\beta_0 R_1) - nJ_1(n\beta_0 R_1)N_0(\beta_0 R_1)}.$$

Pour $n = 1$ (ou $R_1 = 0$), on remarque, comme attendu, que $J_0(\beta_0 R_0) = 0$.

Si $n\beta_0 R$, est suffisamment petit devant l'unité, on peut écrire en première approximation :

$$J_0(n\beta_0 R_1) \simeq 1,$$

$$J_0(\beta_0 R_1) \simeq 1,$$

$$J_1[n\beta_0 R_1] \simeq \frac{n\beta_0 R_1}{2},$$

$$J_1[\beta_0 R_1] \simeq \frac{\beta_0 R_1}{2},$$

$$N_0(\beta_0 R_1) \simeq \frac{2}{\pi} J_0[\beta_0 R_1]\,\mathrm{Log}_n \frac{\gamma\beta_0 R_1}{2}$$

[γ = const. d'Euler].

$$N_1(\beta_0 R_1) \simeq \frac{2}{\pi} J_1(\beta_0 R_1)\,\mathrm{Log}_n \frac{\gamma\beta_0 R_1}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta_0 R_1},$$

(5.11) devient

$$\frac{J_0[\beta_0 R_0]}{N_0[\beta_0 R_0]} \simeq -\frac{\pi}{4}\,\frac{(1-n^2)(\beta_0 R_1)^2}{1 - \frac{1-n^2}{2}(\beta_0 R_1)^2\,\mathrm{Log}_n \frac{\gamma\beta_0 R_1}{2}}.$$

Comme $\beta_0 R_0 < 1$: $(\beta_0 R_1)^2 \log n \frac{\gamma\beta_0 R_1}{2}$ est négligeable devant 1, donc

$$(5.12)\qquad \frac{J_0(\beta_0 R_0)}{N_0(\beta_0 R_0)} \simeq \frac{\pi}{4}(n^2-1)(\beta_0 R_1)^2.$$

Pour R_1 nul :

$$J_0(\beta_{00} R_0) = 0.$$

Pour une valeur non nulle de R_1 :

$$\beta_0 = \beta_{00} + \Delta\beta_0$$

$$J_0[\beta_{00} R_0 + \Delta\beta_0 R_0] \simeq -\Delta\beta_0 R_0[J_1(\beta_{00} R_0)],$$

(5.12) nous donne alors

$$\frac{\Delta\beta_0}{\beta_{00}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{N_0(\beta_{00} R_0)}{J_1(\beta_{00} R_0)}(1-n^2)\beta_{00} R_0 \frac{R_1^2}{R_0^2}.$$

En se souvenant que $n^2 = K$ et que pour le régime vibratoire considéré

$$\beta_{00} R_0 = 2,4.$$

$$N_0(\beta_{00} R_0) = 0,51.$$

$$J_1(\beta_{00} R_0) = 0,52.$$

on trouve

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = -\frac{\Delta\beta_0}{\beta_{00}} = 1,87(K-1)\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2,$$

$$(5.13)\qquad K = 1 + \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \times 0,539.$$

Si l'on se reporte aux approximations faites plus haut, un calcul plus poussé montre que la relation théorique obtenue est exacte à 1 % près lorsque

$$\frac{\sqrt{K}\,R_1}{R_0} \leq \frac{1}{25}$$

et à 3 % près lorsque

$$\sqrt{K}\,\frac{R_1}{R_0} \leq \frac{1}{10}.$$

Pour préciser quelques ordres de grandeur

$$K = 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{R_1}{R_0} = \frac{1}{20},$$

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{3}{0,539 \times 400} = 1,4.10^{-2},$$

cette variation relative est très facile à mesurer avec un ondemètre courant.

La comparaison des surtensions à vide Q_0 et en présence du bâtonnet Q_s permet de déterminer tg θ

en employant la relation déjà démontrée plus haut

$$Z_s^{\text{ohms}} = \left(\frac{Q_0}{Q_s} - 1\right) \frac{1}{K \operatorname{tg}\theta} \frac{h}{R_1^2} \frac{10^{12}}{F_0} \times 0,575,$$

expression qui associée à $Z_s = \frac{Q_0}{C\omega_0}$, où C représente la capacité équivalente de la cavité à vide donne

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0}\right) \frac{1}{K} \frac{h}{R_1^2} C \times 2\pi \times 0,575.10^{12}.$$

Or la capacité équivalente

$$C^{\text{cm}} = 0,067 \frac{R_0^2}{h},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0}\right) \frac{1}{K} \frac{R_0^2}{R_1^2} \times 0,269.$$

Pour faire une mesure précise de tg θ, il faut que

$$\frac{Q_0 - Q_s}{Q_s} \text{ soit au moins égal à } 1/10.$$

En choisissant $K = 4$ et $\frac{R_0}{R_1} = 20$, on trouve

$$Q_0 \operatorname{tg}\theta = 2,69.$$

En prenant une surtension de l'ordre de 5 000 (valeur normale pour une cavité d'essai comme celle que nous avons décrite au voisinage de $f = 3\,000$ Mc : s) on trouve que la valeur minimum que l'on pourra mesurer avec une précision suffisante est sensiblement

$$\operatorname{tg}\theta = 5.10^{-4}.$$

Quelques détails pratiques. — Le bâtonnet choisi doit être constitué par une matière de constante diélectrique suffisamment faible pour éviter de diminuer trop considérablement le rayon R_1. Cette matière doit être suffisamment homogène sur toute sa longueur et offrir un angle de perte assez grand (la stabonite, l'ébonite, le micalex, certains verres peuvent être travaillés sous forme de bâtonnets cylindriques de petit diamètre et présentent une homogénéité convenable.

L'insertion du bâtonnet aussi bien dans la cavité d'essai que dans la cavité étudiée ne présente pas de difficulté majeure en ce qui concerne l'obtention de bons contacts car au voisinage de l'axe les lignes de courant sont radiales et correspondent à des intensités très faibles. Si l'on ménage une petite ouverture à cet endroit le rayonnement est donc peu important et le problème du contact en est très simplifié; on conclut que la meilleure solution consiste à prendre un bâtonnet suffisamment long et à le laisser dépasser de part et d'autre de la cavité.

Pour accroître le sensibilité de la mesure de tg θ on emploie une cavité d'essai argentée ne possédant pas de contact mécanique. On lui donne la forme représentée sur la figure 5.3. Les coaxiaux I et II ont chacun une longueur d'environ $\frac{\lambda}{4}$; leur ensemble constitue un transformateur d'impédance qui ramène en *ab* une résistance égale à la résistance de contact en *cd* multiplié par le rapport de transformation.

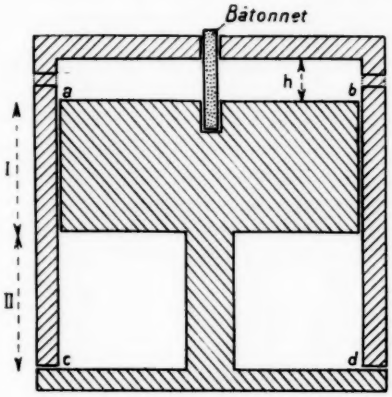


Fig. 5.3.

Ce rapport est égal à $\frac{(Z_{\text{cI}})^2}{(Z_{\text{cII}})^2}$.

Z_{cI} et Z_{cII} symbolisant les impédances caractéristiques des éléments coaxiaux I et II. Ce rapport atteint facilement une valeur de 1000. La surtension de la cavité est considérablement accrue et approche sensiblement celle que permet de calculer la théorie.

Remarquons en passant que les cavités d'essai argentées et à contacts « électriques » présentent des surtensions qui atteignent environ les 4/5 de la surtension théorique dans la gamme de 3 à 10 cm.

Pour les cavités en cuivre poli et récemment décapées les valeurs expérimentales dépassent rarement les 2/3 des valeurs calculées. Ces ordres de grandeur sont très voisins de ceux qu'indiquent les auteurs anglo-saxons; l'interprétation de ces écarts est encore à faire et exige un grand nombre d'expériences.

La mesure de Q et de $\frac{\Delta F_0}{F_0}$ se fera aisément par les méthodes statiques ou dynamiques décrites plus haut.

Remarque. — La détermination des caractéristiques des isolants étant affectuée ici seulement dans le but de mesurer les impédances shunt, il est toujours possible de faire choix d'éléments possédant les qualités convenables pour atteindre

ce but précis; néanmoins la méthode indiquée convient également pour la mesure d'isolants ayant des constantes diélectriques bien plus élevées et des pertes beaucoup plus faibles mais il est nécessaire d'accroître le rapport $\frac{R_1}{R_0}$ et de reconsidérer le problème général en partant de la relation (5.11) où l'on ne peut plus faire les approximations légitimes dans le problème particulier que nous avons traité. Nous n'insisterons pas sur cette question qui est étrangère au programme que nous avons fixé.

5.2. *Deuxième méthode s'appuyant sur la définition énergétique de Z_s.* — La méthode précédente offre l'inconvénient majeur de nécessiter une modification de la cavité étudiée pour permettre l'introduction du bâtonnet diélectrique. De plus, si l'on fait une mesure de l'impédance shunt en considérant la cavité comme un quadripôle, il est nécessaire de prévoir une seconde boucle de couplage.

La méthode que nous proposons maintenant a l'avantage d'étudier la cavité dans *les conditions normales de son emploi, c'est-à-dire associée à un faisceau électronique.*

La mesure de la puissance fournie à la cavité par une source extérieure est relativement facile; le principe en sera indiqué à l'occasion de l'étude spéciale sur les mesures de puissances.

La détermination de l'intégrale de champ électrique est plus délicate et ne peut être assurée qu'en s'appuyant sur une hypothèse d'ordre électronique.

Imaginons que dans un klystron reflex on amène la tension du réflecteur à une valeur très voisine de celle de la cathode; on vérifie dans ces conditions que le tube n'oscille pas et au besoin on règle l'intensité du faisceau pour qu'il en soit ainsi. Un courant de faible intensité circule dans le réflecteur; en abaissant légèrement la tension du réflecteur, on parvient à le faire disparaître.

Lorsqu'on dissipe une puissance connue W dans la cavité, il apparaît entre les grilles séparées par une distance ε, une tension alternative d'amplitude

$$U_0 = \sqrt{2 Z_s W}$$

qui par induction électronique fait apparaître un courant détecté i_R dans le réflecteur.

En diminuant la tension continue de cette électrode d'une quantité U_R on annule i_R.

Or, il est possible d'établir théoriquement une relation entre U_R et U_0 sous la forme

$$i_R = \varepsilon [U_R + D U_0].$$

D mesure la transparence de l'ensemble des grilles du rhumbatron et est une fonction théoriquement connue des dimensions du tube, des caractéristiques du faisceau et de la longueur d'onde.

Étant donnée l'intervention d'une hypothèse, difficilement contrôlable, il ne semble donc pas que cette méthode présente plus de garanties que celle qui consisterait à mesurer Q et à évaluer la self équivalente L par des considérations géométriques, Z_s étant donnée par la relation

$$Z_s = L \omega_0 Q.$$

Mais, en fait la détermination de Z_s par cette dernière formule suppose les pertes distribuées conformément au schéma théorique; or, elles sont surtout localisées au niveau des grilles, au voisinage des soudures verre-métal, au passage de la boucle d'antenne et la relation précédente risque d'être grossièrement erronée.

De l'avis de beaucoup d'auteurs, il semble que la détermination du facteur D, d'après des considérations théoriques, soit moins sujette à critiques que celle de L.

Cette méthode de mesure de Z_s n'étant pas encore suffisamment mise au point il nous est difficile de conclure; néanmoins nous pouvons assurer que l'impédance shunt des cavités de klystrons est certainement un des éléments les plus utiles à connaître pour l'étude des tubes et celui que l'expérimentateur mesure avec le moins de certitude.

CONCLUSION.

Cette première partie de notre étude a montré que quel que soit le caractère de la méthode employée — « dipôle » ou « quadripôle », statique ou dynamique — la précision dans la mesure des surtensions et des impédances-shunt dépend essentiellement de celle que l'on sait obtenir dans la détermination des fréquences et de leurs écarts relatifs; il convient donc d'examiner maintenant le problème des « ondemètres »; cette étude fera l'objet de notre prochain article.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

Pages.

H. Chireix. — Sur le calcul des liaisons radiotéléphoniques multiplex en ondes ultracourtes 3

P. Guénard. — Limitations pratiques de la puissance et du rendement des klystrons à deux cavités 13

F. Violet, A. Danzin et A. Commin. — Le verre dans l'industrie radioélectrique 24

D. Charles. — Mesure des champs magnétiques faibles et des effets de blindage. Application au microscope électronique 75

G. Nicolle. — Transmissions téléphoniques en milieu bruyant 78

J. Bernier. — Essai de théorie du tube électronique à propagation d'onde 87

Informations 102

J. Devaux. — Contribution à l'étude de la mesure de l'absorption des rayons X par la matière 109

F. Violet et R. Lecuir. — L'évolution de la technique des céramiques dans les Laboratoires de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil (C. S. F.). Procédés C. S. F. pour la préparation des céramiques de haute précision 133

G. de Champs. — Récepteur universel RU 95 . 137

P. Giroud et L. Couillard. — Sondeur radioélectrique pour la mesure des hauteurs au-dessus du sol 150

J. Ortusi. — Définition et mesures des coefficients de réflexion dans les guides 173

J. Bernier. — Rectificatif à l'essai de théorie du tube électronique à propagation d'onde .. 195

P. Palluel. — État actuel des connaissances sur l'émission électronique secondaire des substances solides 199

Pages.

R. Warnecke, P. Guénard et C. Fauve. — Sur les effets de charge d'espace dans les tubes à modulation de vitesse à groupement par glissement 224

O. Doehler et W. Kleen. — Théorie cinématique de l'échange d'énergie entre un faisceau électronique et une onde électromagnétique 232

Le microscope C. S. F. au 6e Congrès anglais de microscopie électronique 243

H. Bruck et P. Grivet. — Improvements in the electrostatic microscope 244

F. Bertein, H. Bruck et P. Grivet. — Influence of mechanical defect of the objectives on the resolving power of the electrostatic microscope 249

M. Toussaint et A. Sev. — Le problème de la synchronisation dans les réseaux de la radiodiffusion 253

M. Juillet. — Un récepteur de trafic : le « Recro » 451 270

Informations 283

L. Bouthillon. — Oscillations et phénomènes transitoires. Leur étude par les transformations de Laplace et de Cauchy .. 287

J. Riethmüller. — Méthodes et appareillage de mesure de l'émission des cathodes à oxydes 329

E. Regenstreif. — Sur la détermination des éléments cardinaux des miroirs électroniques. 348

J. Ortusi. — Les cellules photoélectriques à couche d'arrêt 359

F. Bertein. — Relation entre les défauts de réalisation des lentilles et la netteté des images 379

M. Denis et R. Liot. — Contribution à l'étude des procédés et appareils de mesure dans le domaine des ondes centimétriques 409

Imp. GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
127187
Dépôt légal, 1947, N° 225.

SOMMAIRE

L. Bouthillon. — Oscillations et phénomènes transitoires. Leur étude par les transformations de Laplace et de Cauchy 287

J. Riethmüller. — Méthodes et appareillage de mesure de l'émission des cathodes à oxydes . 329

E. Regenstreif. — Sur la détermination des éléments cardinaux des miroirs électroniques. 348

J. Ortusi. — Les cellules photoélectriques à couche d'arrêt 359

F. Bertein. — Relation entre les défauts de réalisation des lentilles et la netteté des images. 379

M. Denis et R. Liot. — Contribution à l'étude des procédés et appareils de mesure dans le domaine des ondes centimétriques. 409

Table des Matières du tome II 439

Imp. GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
127187